Chapter 6
機率分配

6.1 令一隨機變數代表 12 家銀行中，房屋貸款條件爲 30 年期且利率在 7.5%以下者之家數。試問該隨機變數的可能值爲何？

(解) $0 \le x \le 12$，$x \in Z$（整數）

6.2 某旅館有 5 間客房，過去 20 天中，有 2 天只使用 1 間客房，有 4 天使用 2 間，有 8 天使用 3 間，有 4 天使用 4 間，有 2 天使用 5 間。則

a. 以相對次數法建立任意一天客房使用狀況的機率分配。

b. 繪製機率分配圖。

c. 證明你的機率分配滿足間斷機率分配的要求條件。

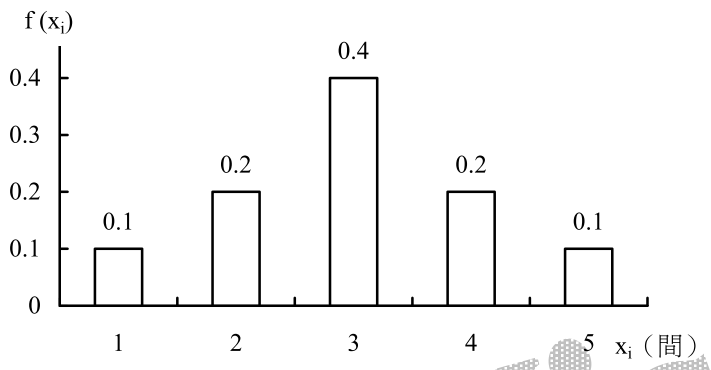
(解)

a.：

使用客房間數 x_i	天數	相對天數 $f(x_i)$
1	2	0.1
2	4	0.2
3	8	0.4
4	4	0.2

5	2	0.1
總計	20	1.0

b.：



c.：**證明** 1. $0 \le f(x_i) \le 1$ ，$\forall \; x_i$

2. $\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.2 + 0.1 = 1$

6.3 下表是某公司專案獲利（X 表示利潤，其單位爲千元）的部分機率分配表。試問

x	f(x)
-100	0.10
0	0.20
50	0.30
100	0.25
150	0.10
200	

a. f(200)的適當數值爲何？請解釋。

b. 該公司獲利的機率爲何？

c. 該公司獲利至少 100,000 元的機率爲何？

解

a.：$f(200) = 1(0.10 + 0.20 + 0.30 + 0.25 + 0.10) = 1 - 0.95 = 0.05$

b.：$P(X>0) = f(50) + f(100) + f(150) + f(200) = 0.30 + 0.25 + 0.10 + 0.05 = 0.7$

c.：$P(X\geq 100) = f(100) + f(150) + f(200) = 0.25 + 0.10 + 0.05 = 0.4$

6.4 張老師服務專線每天接到的求救電話通數在 0 到 5 通之間，求救電話通數的機率分配如表所示。試問

求救電話數	機率
0	0.10
1	0.15
2	0.30
3	0.20
4	0.15
5	0.10

a. 電話通數的期望值爲何？

b. 電話通數的變異數與標準差爲何？

解

a.：$E(x) = \sum_{i=0}^{5} x_i \times f(x_i) = 0 + 0.15 + 0.60 + 0.60 + 0.60 + 0.5 = 2.45$（通）

b.：$V(x) = E[x - E(x)]^2$

$$= \sum_{i=0}^{5}[x_i - E(x_i)]^2 \times f(x_i)$$

$$= (0\text{-}2.45)^2 \times 0.10 + (1\text{-}2.45)^2 \times 0.15 + (2\text{-}2.45)^2 \times 0.30$$

$$+ (3\text{-}2.45)^2 \times 0.20 + (4\text{-}2.45)^2 \times 0.15 + (5\text{-}2.45)^2 \times 0.10$$

$$= 0.60025 + 0.315375 + 0.06075 + 0.0605 + 0.360375$$

$$+ 0.65025$$

$$= 2.0475$$

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2.0475} = 1.43$$

6.5 某汽車保險公司的損害保險求償狀況，如下表所示。試問

理賠金額（單位：千元）	機率
0	0.90
40	0.04
100	0.30
200	0.01
400	0.01
600	0.01

a. 利用期望賠償給付金額決定損益兩平的保費。

b. 保險公司每年收取 26,000 元的保費，對保險客戶而言，其投保期望值爲何（提示：保險公司平均給付金額減投保保費）？爲什麼保戶以此期望值購買此一保險？

解 *a.*：$E(X)=0\times0.90+40{,}000\times0.04+100{,}000\times0.03+200{,}000\times0.01+400{,}000\times$

$0.01+600{,}000\times0.01$

$=16{,}600$（元）

b.：$16{,}600-26{,}000=-9{,}400$（元）

因為維護收支平衡的相等原則（損益兩平點）

6.6 考慮 n＝20，p＝0.7 之二項分配，請使用二項機率表回答下列問題。

a. 求 f(12)。

b. 求 P(X≥15)。

c. 求 E(X)、Var(X)及σ 。

解 *a.*：$f(12)=C^{20}_{12}(0.7)^{12}(0.3)^{8}=\dfrac{20!}{12!8!}(0.7)^{12}(0.3)^{8}=0.11$

b.：$P(X\geq15)=f(15)+f(16)+f(17)+f(18)+f(19)+f(20)=0.42$

c.：$E(X)=n\times p=20\times0.7=14$

$Var(X)=n\times P\times(1-P)=4.2$

$\sigma=\sqrt{4.2}=2.05$

6.7 某大學發現有 20%的學生統計學不及格，假設本學期有 20 位學生選修統計學，試問

a. 最多 2 位不及格的機率爲何？

b. 恰有 4 位不及格的機率爲何？

c. 超過 3 位不及格的機率爲何？

d. 不及格人數的期望值爲何？

e. 不及格人數的變異數爲何？

解

n = 20，P = 0.2

a.：$P(X\leq2)=f(0)+f(1)+f(2)$

$=C_0^{20}(0.2)^0(0.8)^{20}+C_1^{20}(0.2)^1(0.8)^{19}+C_2^{20}(0.2)^2(0.8)^{18}$

$=0.2061$

b.：$P(X=4)=\frac{20!}{16!4!}(0.2)^4(0.8)^{16}=0.2182$

c.：$P(X>3) = 1 - P(X\leq3) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$

$= 1 - 0.41 = 0.59$

d.：$E(X) = n\times P = 20\times0.2 = 4$

e.：$Var(X) = n\times P\times(1 - P) = 4\times0.8 = 3.2$

6.8 某大學的電話打入頻率爲每 2 分鐘 1 通電話。試問

a. 每小時平均打入通數爲何？

b. 5 分鐘打入 3 通的機率爲何？

c. 5 分鐘內沒有任何電話打入的機率爲何？

解

a.：$\lambda = 0.5$（通 / 分）

$60 \times 0.5 = 30$（通）

b.：$5 \times 0.5 = 2.5$

$f(3)=\dfrac{(2.5)^3 \times e^{-2.5}}{3!}=0.21$

c.：$f(0)=\dfrac{(2.5)^0 \times e^{-2.5}}{0!}=0.08$

6.9 在某一國際機場，航空旅客隨機且獨立地到達旅客檢查站，其每分鐘的平均到達人數為 20 人。試問

a. 1 分鐘內沒有旅客到達的機率為何？
b. 1 分鐘內最多 3 位旅客到達的機率為何？
c. 30 秒內沒有旅客到達的機率為何？
d. 30 秒內至少 1 位旅客到達的機率為何？

解

a.：$f(0)=\dfrac{(20)^0 \times e^{-20}}{0!}=2.06 \times 10^{-9}$

b.：$P(X \le 3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$

$=\dfrac{(20)^0 \times e^{-20}}{0!}+\dfrac{(20)^1 \times e^{-20}}{1!}+\dfrac{(20)^2 \times e^{-20}}{2!}+\dfrac{(20)^3 \times e^{-20}}{3!}=3.2 \times 10^{-6}$

c.：$f(0)=\dfrac{(10)^0 \times e^{-10}}{0!}=4.5 \times 10^{-5}$

d.：$p(X \ge 1)=1-f(0)=1-\dfrac{(10)^0 \times e^{-10}}{0!}$

6.10 針對 100 位投資者所做的調查顯示，只有 2%的投資者認為投資貨幣市場基金並不安全。試問

a. 恰有 3 位投資者認為投資貨幣市場基金並不安全的機率為何？

b. 至少有 3 位投資者認為投資貨幣市場基金並不安全的機率為何？

解

a.：$P(X=3)=\frac{100!}{3!97!}=(0.02)^3(0.98)=0.18$

b.：$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-[f(0)+f(1)+f(2)]$

$=1-[0.98^{100}+100\times(0.02)\times(0.98)+4750\times(0.02)^2\times(0.98)]$

$=0.3233$

6.11 某一班級有 25 位學生，其中 15 位男生、10 位女生。已知星期四有 5 位學生曠課。試問

a. 曠課學生中有 2 位是女生的機率為何？

b. 曠課學生中有 2 位是男生的機率為何？

c. 曠課學生全部是男生的機率為何？

d. 曠課學生全部不是男生的機率為何？

解

a.：$$\frac{C_3^{15}C_2^{10}}{C_5^{25}}=\frac{\frac{15!}{12!3!}\times\frac{10!}{8!2!}}{\frac{25!}{20!5!}}=0.385$$

b.：$$\frac{C_2^{15}C_3^{10}}{C_5^{25}}=\frac{\frac{15!}{13!2!}\times\frac{10!}{7!3!}}{\frac{25!}{20!5!}}=0.237$$

c.：$$\frac{C_5^{15}C_0^{10}}{C_5^{25}}=\frac{\frac{15!}{10!5!}}{\frac{25!}{20!5!}}=0.0565$$

d.：$\dfrac{C_0^{15}C_5^{10}}{C_5^{25}}=\dfrac{\frac{10!}{5!5!}}{\frac{25!}{20!5!}}=4.74\times 10$

6.12 某上市公司股票現在的股價爲每股東 16 元，一投資者計劃買進並持有一年時間。令 X 表示一年後該股票的價格，此隨機變數的機率分配如下表所示。試問

X	f(x)
16	0.35
17	0.25
18	0.25
19	0.10
20	0.05

a. 一年後該股票的每股期望利潤爲何？

b. 一年後該股票的每股利潤之變異數爲何？

c. 若另有一支股票的期望利潤與該股票相似，但其變異數爲 3；在考慮風險的情況下，哪支股票較佳？

解

a.：$E(X-16)=0\times0.35+1\times0.25+2\times0.25+3\times0.10+4\times0.05=1.25$

b.：$Var(X-16)=Var(Y)=\Sigma\ [y_i-E(y_i)]^2=(0-1.25)^2\times0.35+(1-1.25)^2\times0.25$

$+(2-1.25)^2\times0.25+(3-1.25)^2\times0.10+(4-1.25)^2\times0.05=1.3875$

c.：$\because\ E(Y)\approx E(Z)$

$Var(Y)=1.3875 < Var(Z)=3$

∴ 選擇本支股票

6.13 許多公司採用允收抽樣之品質管制技術，來檢測原料及零件的品質水準。就電子產業而言，整批零件從供應商處送來，廠商抽取 n 個樣本進行檢驗，此即爲一個二項實驗中包含 *n* 個試驗，每一試驗結果爲良品或不良品。假設某電子公司自供應商處購進一批電子零件，如果整批產品的不良率不超過 1%，則允收該批產品。現自該批產品中隨機抽取 5 個零件作爲樣本，試問

a. 假設整批產品的不良率爲 1%，則樣本中沒有不良品的機率爲何？

b. 假設整批產品的不良率爲 1%，則樣本中恰有 1 件不良品的機率爲何？

c. 假設整批產品的不良率爲 1%，則樣本至少有 1 件不良品的機率爲何？

d. 若樣本中發現 1 件不良品，則你認爲可以允收該批產品嗎？爲什麼？

解

$n = 5$，$n \times p = 0.05$，$n \times p(1-p) = 0.0475$

a.：$f(0) = C_0^5 (0.01)^0 \times (0.99)^5 = 0.95$

b.：$f(1) = C_1^5 (0.01)^1 \times (0.99)^4 = 0.046$

c.：$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.95 = 0.05$

d.：$\because n \times p = 0.05$　而 $1 > 0.05$

∴ 不允許

6.14 假設每分鐘平均有 5 部車輛到達收費站，試問 15 分鐘至少有 20 部車輛到達

收費站的機率為何？

解

15×5 = 75

P(X≥20)=1-P(X<20)

$$=1-\left(\frac{75^0e^{-75}}{0!}+\frac{75^1e^{-75}}{1!}+\frac{75^2e^{-75}}{2!}+\frac{75^3e^{-75}}{3!}+\frac{75^4e^{-75}}{4!}+\frac{75^5e^{-75}}{5!}\right.$$

$$+\frac{75^6e^{-75}}{6!}+\frac{75^7e^{-75}}{7!}+\frac{75^8e^{-75}}{8!}+\frac{75^9e^{-75}}{9!}+\frac{75^{10}e^{-75}}{10!}+\frac{76^{11}e^{-75}}{11!}$$

$$+\frac{75^{12}e^{-75}}{12!}+\frac{75^{13}e^{-75}}{13!}+\frac{75^{14}e^{-75}}{14!}+\frac{75^{15}e^{-75}}{15!}+\frac{75^{16}e^{-75}}{16!}+\frac{75^{17}e^{-75}}{17!}$$

$$\left.+\frac{75^{18}e^{-75}}{18!}+\frac{75^{19}e^{-75}}{19!}\right)$$

$$=1-4.73\times10^{-14}$$

$$\fallingdotseq 1$$

6.15 隨機從一副撲克牌中抽出 5 張牌，試問

a. 有一對 Aces 的機率為何？

b. 恰有 1 張 Ace 的機率為何？

c. 沒有 Ace 的機率為何？

d. 至少有 1 張 Ace 的機率為何？

解

a.：$\dfrac{C_2^4C_3^{48}}{C_5^{52}}=\dfrac{\frac{4!}{2!2!}\times\frac{48!}{45!3!}}{\frac{52!}{47!5!}}=0.0399$

$$b.\ :\ \frac{C_1^4 C_4^{48}}{C_5^{52}} = \frac{\frac{4!}{1!3!} \times \frac{48!}{44!4!}}{\frac{52!}{5!47!}} = 0.299$$

$$c.\ :\ \frac{C_5^{48}}{C_5^{52}} = \frac{\frac{48!}{43!5!}}{\frac{52!}{47!5!}} = 0.6$$

$$d.\ :\ 1 - \frac{C_0^4 C_5^{48}}{C_5^{52}} = 0.34$$