Chapter 5

機率論

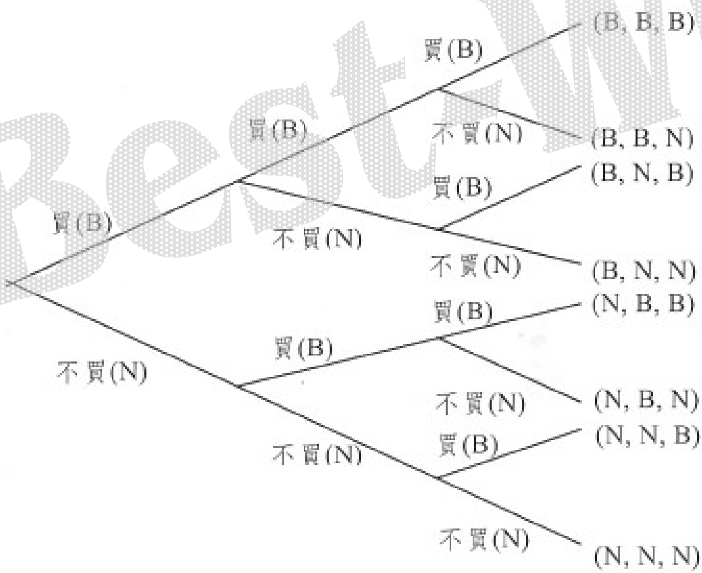
5.1 打三通推銷電話，每一通的結果都是買與不買，則

a. 畫出此實驗的三步驟樹狀結構圖。

b. 找出每一個樣本點及樣本空間，共有多少個樣本點？

Ans◆

a.：



b.：樣本點：(B, B, B), (B, B, N)

(B, N, B), (B, N, N)

(N, B, B), (N, B, N)

(N, N, B), (N, N, N)

樣本空間：{ (B, B, B) (B, B, N) (B, N, B) (B, N, N) (N, B, B) (N, B, N) (N, N, B) (N, N, N) } 共有 8 個樣本點

5.2 朝陽公司正要組成一個 4 人小組的長期規劃委員會，藉以評估並制定該公司未來五年進入新產品市場之策略。公司總裁欲從 8 位有經驗的管理者中選出 4 位以組成之，試問有多少種組合方式？

Ans◆

$C_4^8 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$（種）

5.3 從一副撲克牌（52 張）中選取一張牌，則

a. 有多少個可能的樣本點？

b. 每一個樣本點的機率如何計算？（古典方法、相對次數法或主觀法）

c. 每一張牌出現的機率是多少？

d. 證明你的機率指派方式滿足機率性質。

Ans◆

a.：52 個樣本點

b.：是以古典方法來計算

c.：$\frac{1}{n(S)} = \frac{1}{52}$

d.：假設每一種隨機試驗結果出現的可能性皆相等之情況下，衡量其機率。

隨機試驗 n(S)個，機率分別為 $\frac{1}{n(S)}$；$0 \le \frac{1}{n(S)} \le 1$，$\sum \frac{1}{n(S)} = 1$

5.4 某個小電器行蒐集過去 50 週電視的銷售狀況資料，其資料顯示於下表中。假如我們對某一週該電器行中電視的銷售狀況有興趣，則

電視銷售數量	週數
0	6
1	12
2	15
3	10
4	5
5	2
總計	50

a. 試問有多少種可能的銷售結果？

b. 你建議該如何計算機率給這些銷售結果？

c. 計算機率並檢查是否滿足機率性質。

Ans◆

a.：6 種。

b.：以相對次數法

電視銷售數量	週數	機率
0	6	0.12
1	12	0.24
2	15	0.30
3	10	0.20
4	5	0.10
5	2	0.04
總計	50	1

c.： $S=\{0,1,2,3,4,5\}$

1. $0 \le P(\le 1)$　I=0, 1, 2, 3, 4, 5

2. $\sum_{i=0}^{5} P(\{i\})=1$　I=0, 1, 2, 3, 4, 5

5.5 一實驗有三種實驗結果，其機率分別為：$P(E_1)=0.35$，$P(E_2)=0.4$，$P(E_3)=0.25$。

a. E_1 或 E_2 發生的機率為何？

b. E_1 或 E_3 發生的機率為何？

c. E_1、E_2 或 E_3 發生的機率為何？

Ans◆

a.：$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = 0.75$

b.：$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) = 0.6$

c.：$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$

5.6 考慮一次丟擲兩個均勻骰子的實驗。假設我們對所丟擲之點數和有興趣，則

a. 列出所有的樣本點。

b. 點數和為 7 的機率為何？

c. 點數和為 9 或比 9 大的機率為何？

d. 因為點數和有 6 種偶數結果(2, 4, 6, 8, 10, 12)，但只有 5 種奇數結果(3, 5, 7, 9, 11)，這表示出現偶數和的次數將高於奇數和，你同意嗎？請解釋。

e. 你用什麼方法計算上述問題之機率？

Ans◆

a.：樣本點

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)

(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)

(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)

(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)

(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

b.：點數和為 7 的樣本：

(1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 2) (6, 1)

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

c.：點數和為 9 或比 9 大的樣本：

(3, 6) (4, 5) (5, 4) (6, 3) (4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

d.：樣本點點數和：

2, 3, 4, 5, 6, 7

3, 4, 5, 6, 7, 8

4, 5, 6, 7, 8, 9

5, 6, 7, 8, 9, 10

6, 7, 8, 9, 10, 11

7, 8, 9, 10, 11, 12

不同意，因為樣本點點數和為偶數與奇數的機率皆為$\frac{1}{2}$。

e.：古典方法。

5.7 一項針對某一雜誌訂戶所做的調查顯示，有 75%的訂戶投資貨幣基金，30%的訂戶投資定存單，20%的訂戶兩者皆有之。試問只投資其中一項的機率爲何？兩者皆沒有投資的機率爲何？

Ans◆

P（貨幣基金）+P（定存單）－2P（皆有）

=0.75+0.3－2×0.2

=0.65

兩者皆無=1－P（貨幣基金 ∪ 定存存單）=1－0.85=0.15

5.8 設兩事件 A 和 B， $P(A)=0.5$，$P(B)=0.60$，且 $P(A\cap B)=0.40$ 。

a. 求 $P(A|B)$。

b. 求 $P(B|A)$。

c. A 和 B 是否獨立？爲什麼？

Ans◆

a.：$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.4}{0.6}=\dfrac{2}{3}$

b.：$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.5}=\dfrac{4}{5}$

c.：否

$\because P(A|B)\neq P(A)$

[或 $P(B|A)\neq P(B)$

或 $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$]

$\therefore$A、B 不獨立。

5.9 設兩事件 A 和 B 爲互斥事件，且 $P(A)=0.30$，$P(B)=0.40$。則

a. 求 $P(A\cap B)$。

b. 求 $P(A|B)$。

c. 有一學生說互斥事件就是獨立事件，你同意這樣的說法嗎？請用上述機率資料回答之。

d. 你如何判定互斥或獨立事件？

Ans◆

a.：$\because$A、B 為互斥事件

$\therefore P(A\cap B)=0$

b.：$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$

c.：不同意。

$\because$互斥事件$P(A\cap B)=0$，但獨立事件$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0.3\times 0.4\neq 0$

$\therefore$互斥事件不是獨立事件

d.：獨立事件：一事件的發生，不會影響另一事件發生的機率。

互斥事件：兩事件沒有共同的樣本點。

5.10 某些投資分析師相信，股票市場 1 月份的表現績效是該市場當年度的領先指標。根據歷史資料，投資分析師提供下列的機率估計：

- 1 月份股價將上漲的機率為 0.70。
- 全年股價將上漲的機率為 0.80。
- 1 月份股價及全年股價皆上漲的機率為 0.63。

a. 若已知 1 月份的股價上漲，利用投資分析師的估計資料計算全年股價將上漲的機率為何？

b. 假設股價 1 月份未上漲但全年卻上漲的機率為 0.17，若股價在 1 月份確實未上漲，試問全年上漲的機率為何？

c. 利用上述的條件機率資料，你認為 1 月份的股價表現是否為全年表現的領先指標？

d. 股價 1 月份的表現和全年的表現是否為獨立事件？請解釋。

Ans◆

A：1 月份股價上升，B：全年股價上升

a.：$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.63}{0.7}=0.9$

b.：$P(A'\cap B)=0.17$

$$P(B|A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{0.17}{1-0.7}=\frac{17}{30}$$

c.：是，因為$P(B|A)=0.9>P(B|A')=\dfrac{17}{30}$

d.：不是，因為 $P(A\cap B)=0.63\neq 0.7\times 0.8$

5.11 事件 A_1、A_2和 A_3的事前機率分別爲 $P(A_1)=0.20$、$P(A_2)=0.50$、$P(A_3)=0.30$，條件機率 $P(B|A_1)=0.50$、$P(B|A_2)=0.40$、$P(B|A_3)=0.30$。則

a. 計算 $P(B\cap A_1)$、$P(B\cap A_2)$、$P(B\cap A_3)$。

b. 利用貝氏定理式(4.18)式計算事後機率 $P(A_2|B)$。

c. 利用表格求解法計算 $P(A_1|B)$、$P(A_2|B)$及 $P(A_3|B)$。

Ans◆

a.：$P(B\cap A_1)=P(B|A_1)\times P(A_1)=0.5\times 0.2=0.1$

$P(B\cap A_2)=P(B|A_2)\times P(A_2)=0.4\times 0.5=0.2$

$P(B\cap A_3)=P(B|A_3)\times P(A_3)=0.3\times 0.3=0.09$

b.：$P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2\cap B)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)}=\dfrac{0.2}{0.39}=\dfrac{20}{39}$

c.：∵

	A_1	A_2	A_3	
B	0.1	0.2	0.09	0.39
B′	0.1	0.3	0.21	0.61
	0.2	0.5	0.3	1

$$\therefore P(A_1\,|\,B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.39}=\frac{10}{39}$$

$$P(A_2\,|\,B)=\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.39}=\frac{20}{39}$$

$$P(A_3\,|\,B)=\frac{P(A_3\cap B)}{P(B)}=\frac{0.09}{0.39}=\frac{9}{39}=\frac{3}{13}$$

5.12 某公司投標大型研究計畫，公司管理者覺得有 50%的機會可以標得此一計

晝，但招標代理商要求投標者提供額外資訊。根據過去經驗顯示，在得標的工程中，有 75%的代理商要求提供額外資訊；在未得標的工程中，有 40%的代理商要求提供額外資訊。則

a. 在沒有要求額外資訊的情況下，得標的機率為何？

b. 在已知得標的情況下，要求額外資訊的條件機率為何？

c. 在已知要求額外資訊的條件下，得標的事後機率為何？

Ans◆

令 A＝得標的事件

B＝提供額外資訊的事件

a.：$P(A|B')=\dfrac{P(A\cap B')}{P(B')}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$

又 $P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)=0.75\times 0.5=0.375$

$P(A'\cap B)=P(B|A')\times P(A')=0.4\times 0.5=0.2$

$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=0.575$

$\therefore P(A|B')=\dfrac{0.5-0.375}{1-0.575}=\dfrac{0.125}{0.425}=\dfrac{5}{17}$

b.：$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.375}{0.5}=\dfrac{3}{4}=0.75$

c.：$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.375}{0.575}=\dfrac{15}{23}$

5.13 《風險年鑑》裡有各種事件發生機率的資料，如一年內男性開車意外事故發生的機率是女性開車意外事故的兩倍，其機率分別為 0.113 和 0.057。假設某城市男性開車的比率為 65%，今該城市有一駕駛人發生意外事故，請問其為女性的機率為何？

Ans◆

A：發生意外事故，D：開車

$P(A_{男})=0.113$

$P(A_{女})=0.057$

$P(D_{男})=0.65$

$P(D_{女})=0.35$

$$P(D_{女}|D)=\frac{0.35\times0.057}{0.35\times0.057+0.65\times0.113}=\frac{0.01995}{0.0934}=0.2136$$

5.14 一大型汽車公司正推出新款式車子之電視廣告並進行一項調查，調查結果得到如下資料：

B 爲消費者購買這種款式車子的事件

S 爲消費者看過此電視廣告的事件

$B\cap A$ =消費者購買這種款式車子且看過此電視廣告

$P(B)=0.20$，$P(S)=0.40$，$P(B\cap S)=0.12$

a. 已知消費者看過此電視廣告，請問其購買這種款式車子的機率爲何？電視廣告是否增加銷售的機率？作爲一個決策者，你認爲是否應該繼續打電視廣告？（假設廣告費相當合理）

b. 該公司此項產品的市場占有率，你的估計是多少？你認爲電視廣告是否會增加市場占有率？爲什麼？

c. 該公司也推出另一廣告，其機率值爲 $P(S)=0.30$ 及 $P(B\cap S)=0.10$。試問此電視廣告的 $P(B|S)$ 爲多少？哪一個電視廣告的效果比較好？

Ans◆

a.：$P(B|S)=\frac{0.12}{0.4}=0.3$

$P(B|S')=\frac{0.2-0.12}{0.6}=\frac{2}{15}\fallingdotseq 0.13$

$\because P(B|S) > P(B|S')$

$\therefore$ 廣告增加銷售→應該繼續打廣告

b.：$P(B)=0.2$（市場占有率）

$\because P(B)=0.2 < P(B|S)=0.3$

$\therefore$ 廣告會增加市場占有率

c.：$P(B|S)=\dfrac{0.1}{0.3}=\dfrac{1}{3}\approx 0.33$

$0.33 > 0.3$

$\therefore$ 後來的廣告效果較好

5.15 某公司對某一銷售訓練計畫進行評估，發現該公司 200 名業務員裡有 50 名業務員去年獲得紅利獎金，其中有 20 名參加過特別的銷售訓練計畫。令

B 定義爲業務員獲得紅利獎金的事件

S 爲業務員參加過特別的銷售訓練計畫的事件

a. 求 $P(B)$、$P(S|B)$及 $P(S\cap B)$。

b. 假設有 40%的業務員參加過公司的銷售訓練計畫，若已知該業務員參加過銷售訓練計畫，試問其獲得紅利獎金的機率 $P(B|S)$爲何？

c. 如果公司評估銷售訓練計畫的基準是獲得紅利獎金的機率，則你對銷售訓練計畫的評估是什麼？B 和 S 是否是獨立事件？

Ans◆

a.：$P(B)=\dfrac{50}{200}=0.25$

$P(S|B)=\dfrac{20}{50}=0.4$

$P(S\cap B)=0.4\times 0.25=0.1$

b.：$P(S)=0.4$

$$P(B|S)=\frac{P(B\cap S)}{P(S)}=\frac{0.1}{0.4}=0.25$$

c.：參加訓練獲得紅利的機率 $=\frac{20}{200\times 40\%}=\frac{20}{80}=0.25$

未參加獲得紅利的機率 $=\frac{30}{200\times 60\%}=\frac{30}{120}=0.25$

∵兩者機率相等　∴績效不佳

∵ $P(B\cap S)=P(B)\times P(S)$

∴B 和 S 為獨立事件

5.16 有一統計教授根據過去的經驗指出，做作業的學生有 0.90 的機率會及格，不做作業的學生有 0.15 的機率會及格，該教授估計有 75%的學生會做作業。若已知某學生該科及格，試問其做作業的機率為何？

Ans◆

A：做作業，B：及格

$P(B|A)=0.90\rightarrow P(B\cap A)=0.675$

$P(B|A')=0.15\rightarrow P(B\cap A')=0.0375$

$P(A)=0.75$

$$P(A|B)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{0.675}{0.675+0.0375}=0.9474$$