

以連續小波轉換分析土層表面波波速之研究

王裕賢¹，蔡佩勳²，李宜珊³

¹ 朝陽科技大學營建工程系 碩士

² 朝陽科技大學營建工程系 助理教授

³ 朝陽科技大學營建工程系 研究生

摘要

傳統的表面波譜法(SASW)是利用快速傅立葉轉換將時域訊號轉換至頻率域後再進行相位譜分析，但相位譜容易受到雜訊干擾造成跳動頻繁，進而限制分析結果之準確性。本研究將以時頻方法以求解表面波之波速，利用表面波攜帶能量大於實體波之特性，以連續小波轉換將時域訊號轉換至時頻域訊號，由對應於某頻率下不同收波器所接收能量較高的表面波之傳遞時間來計算其波速，進而求出表面波之頻散曲線。本研究將分別以單一土壤、雙層土壤以及三層土壤進行討論。從分析的結果顯示，本研究發展的方法可以推估土層之厚度及各土壤之波速，為了驗證其可行性，本研究最後也以現地試驗來驗證。

關鍵字：連續小波轉換、表面波、頻散曲線

1、前言

表面波譜法為近年來新興發展之非破壞檢測方法，可藉由頻譜分析求取土層剖面剪力波速與剪力模數等資料。由於此法進行試驗時僅需將收波器置於土體表面，且對土壤之影響屬微小應變($\gamma < 10^{-3}\%$)，故此試驗屬非破壞檢測範疇，可簡便、快速地求取土層之動態參數。

表面波譜法試驗程序包含現地試驗與資料分析兩部分。在資料分析方面傳統是利用快速傅立葉轉換(FFT)將時域(x(t))訊號轉換至頻率域(X(f))，再進行相位譜分析，但是相位譜容易受到雜訊干擾造成跳動頻繁。本研究將尋求一種可以分析表面波波速以及進行土層分層的方法，利用雷利波攜帶的能量大於實體波，且其在地表面附近能量的衰減也較實體波小，容易被收波器偵測到之特點。將收波器所接收的時域訊號轉換至時頻域上，由不同接收器之高能量的傳遞時間，以及相隔的距離來判斷波速，並由時頻域對應

的頻率值，計算其波長，再據以繪製土層頻散曲線。

2、研究方法

2.1 表面波與頻散現象

在半無限域內除了實體波外，當波傳至邊界時，為滿足邊界條件，造成在表面邊界上傳播的波稱為表面波(surface wave)，由於此波由Rayleigh發現【1】，故又稱雷利波(Rayleigh wave)，雷利波之最大特性為其質點運動約限制在一個波長之深度範圍。若在地表施以垂直向點衝擊荷重，則壓力波(compression wave)、剪力波(shear wave)和雷利波之向外傳播與衰減方式如圖1所示【2】，其傳播所攜之能量壓力波、剪力波和雷利波分別占7%、26%和67%之能量，且R波能量衰減速度遠較壓力波及剪力波慢。

壓力波、剪力波與雷利波之波傳速度在均質均向彈性半無限空間中可視為定值，與傳遞之頻率(或波長)無關，但當土層之剪力模數隨著深度而變化時，雷利波之影響深度會隨著頻率之不同而有所差異，造成波傳速度亦隨著頻率(或波長)之不同而變化，此現象稱之為頻散(dispersion)現象如圖2及圖3所示【3】。

2.2 FLAC 程式簡介

本研究中所使用之FLAC程式(Fast Lagrangian Analysis of Continua)由美國Itasca Consulting Group, Inc. 發展以外顯有限差分法(Explicit finite difference method)為原則的數值分析軟體，適用於深開挖穩定、隧道開挖、邊坡滑動、基礎承載、土石壩分析等多項大地工程問題。其運算過程是以「時階」方式(time-step)來求解每一個節點的運動方程式，在每一個時階中，利用系統每一節點的不平衡力，以運動方程式求出節點的速度和位移，然後決定節點之應變增量；再利用應力應變組合律決定新的應力增量，藉此應力增量又可以更新節點的不平衡力，如此程式將反覆執行此運算步驟，直到各節點中最大的不平衡力趨近於零，達靜力平衡為止，計算流程如圖4所示。

2.3 FLAC表面波模擬

FLAC網格範圍為30m*30m的軸對稱模型(如圖5所示)，而網格元素大小為0.2m*0.2m，在網格的右側及底部設置安靜邊界(quiet boundary)，避免波傳至邊界時產生反射現象。因表面波的振動不大，土體皆假設仍在彈性範圍，故本研究之分析模式採用彈性模式，其所需輸入之參數包括有土壤單位重(γ)、剪力模數(G)、體積模數(B)等資料。本研究土層分為單一土層(案例1)、雙層土層(案例2、3、4)及三層土層(案例5)，其參數設定如表1所示。利用一個半正弦平方時間函數的荷重來模擬敲擊源(振源)產生能量，而能量以波的形式向四面散佈出去。記錄分析過程中離振源1m~16m等16個位置網格節點處的速度歷時反應。

2.4 連續小波轉換

連續小波轉換是輸入資料序列和一組小波函數而產生的摺積。這個摺積可以用快速傅立葉轉換來計算。連續小波轉換之數學表示式：

$$W_x(a, b) = \left\langle x(t), \Psi_{(a,b)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R x(t) \Psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1)$$

其逆轉換為：

$$x(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_x(a, b) \Psi_{(a,b)}(t) da db \quad (2)$$

其中

$$C_\Psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad (3)$$

$\Psi(t)$ 稱為基本小波(basic wavelet)或稱為母小波(mother wavelet)； $\Psi_{(a,b)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 為母小波函數 $\Psi(t)$ 經伸縮及平移所得之基底函數； a 與 b 分別為尺度(scale)參數與平移(translate)參數； $\hat{\Psi}$ 與 Ψ^* 分別為 $\Psi(t)$ 之傅立葉轉換值與共軛函數；而 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 是為了使其轉換後的能量保持相等。

連續小波轉換可對於傅立葉轉換在時間域與頻率域分析的局限性加以改善，使用一種可隨訊號之高頻或低頻改變的視窗，其作用如同在短時傅立葉轉換(STFT)中的視窗意義相同，使得在高頻部分有良好的時間解析度，在低頻部分有良好的頻率解析度。

當完成連續小波轉換後，所得到的是尺度與時間關係圖，而不同於短時傅立葉轉換(STFT)的頻率與時間關係圖。事實上，尺度與頻率表示的不同只在於刻度的轉換，而尺度與頻率之關係為：

$$f = \frac{f_0}{a \cdot \Delta} \quad (4)$$

其中 f_0 為母小波之中心頻率； a 為尺度參數； Δ 為取樣時間間隔

2.5分析表面波波速的方法

本研究使用的母小波為複數型Morlet小波，因為其為複數型小波，故連續小波轉換之結果會產生實部與虛部之轉換值，將實部($\text{Real}[W_x(a, b)]$)與虛部($\text{Imag}[W_x(a, b)]$)之轉換值以下式計算模值：

$$\overline{W}_x = \sqrt{\text{Real}[W_x(a, b)]^2 + \text{Imag}[W_x(a, b)]^2} \quad (5)$$

由不同距離的收波器模值取數個不同頻率下的模值數據繪製剖面圖，由各模值剖面圖第一個峰值所對應的時間視為雷利波到達時間。由相鄰收波器之距離(D)及第一個峰值到達時間差(Δt)即可求得不同頻率下的雷利波波速(V_R)：

$$V_R = D/\Delta t \quad (6)$$

求得不同頻率下之雷利波波速後，即可由下式求得不同頻率下的雷利波波長(λ)：

$$\lambda = V_R/f \quad (7)$$

由雷利波波速(V_R)及波長(λ)即可繪製土層表面波頻散曲線。

由於靠近振源的區域可能受實體波的干擾，即所謂近域效應；離開振源過遠表面波能量衰減而易被環境雜訊掩蓋，即所謂遠域效應。為了能獲得表面波的訊號，可透過以

下方法來完成：收波器擺設的位置及訊號擷取(篩選)的準則。許多學者提出了篩選條件如表2所示【4】。本研究將以訊號擷取準則來篩選訊號，假設振源至收波器距離為S，在修改Rosset篩選標準原則而訂定本研究之數據篩選原則，將取離振源3m~11m收波器之數據進行數據篩選，以下說明本研究之數據篩選原則，假設 $S=\lambda$ ，若 $S=3m=\lambda$ ，又土壤表面波波速範圍假設為200~600m/sec時，則 $\lambda = 3m = \frac{V}{f} = \frac{200}{f_1} = \frac{600}{f_2}$ ，得 $f_1=66.7\text{Hz}$ 、 $f_2=200\text{Hz}$ ，因此離振源3m收波器可選取頻率為66.7~200Hz之振波來分析，若 $\Delta=2\times 10^{-5}\text{sec}$ ，且小波中心頻率取 $f_0=0.1\text{Hz}$ ，即

$$a_1 = \frac{f_0}{\Delta \cdot f_1} = \frac{0.1}{2 \times 10^{-5} \times 66.7} = 75, \quad a_2 = \frac{f_0}{\Delta \cdot f_2} = \frac{0.1}{2 \times 10^{-5} \times 200} = 25$$

故離振源3m收波器可選取 $a=25\sim 75$ 的範圍資料進行分析，其他距離收波器之數據篩選原則如表3所示。

3、分析結果與討論

為了說明與驗證本研究所發展的表面波波速的分析方法的可行性，本研究分別對單層土層、雙層土層及三層土層進行數值模擬，再以本研究發展的方法決定其頻散曲線。

3.1單層土層之結果與討論

圖6為單層土層在篩選標準 $S=\lambda$ 之表面波頻散曲線，由於在數值模擬時我們假設僅為一層土層，且其剪力波速為200m/sec，從圖中可看出所有的速度約在177~190m/sec，由於表面波波速與剪力波波速在柏松比 $\nu=0.25$ 時其比值約0.92，得表面波波速為184m/sec，所以圖6的結果吻合我們數值模擬的設定值。

3.2雙層土層之結果與討論

在雙層土層中，表土層的剪力波速假設為200m/sec，首先假設表土層厚度為1m，1m底下為底層土層，而底層的土壤剪力波速假設為500m/sec。圖7為表土層厚度1m在篩選標準 $S=\lambda$ 之表面波頻散曲線，從圖中可以看出所有的速度約在360~515m/sec，但其速度分佈沒有顯示出表土層之波速與厚度，推斷土層太薄無法在頻散曲線被辨識出來。圖8為表土層厚度2m在篩選標準 $S=\lambda$ 之表面波頻散曲線，從圖中可以看出波長約在4m內速度約為177~182m/sec之間，而波長在4m以上其速度約在440~490sec之間，因此判定波長在4m處為土層交界面。圖9為表土層厚度3m在篩選標準 $S=\lambda$ 之表面波頻散曲線，從圖中可以看出波長約6m內速度約為178~190m/sec之間，而波長在6m以上其速度約在400~470m/sec之間，因此判定波長在6m處為土層交界面。從表土層厚度2m及3m之表面波頻散曲線，可以推估土層厚度約為表面波波長之一半，此與過去部份之看法是相同的。

3.3三層土層之結果與討論

在三層土層中，表土層的剪力波速假設為200m/sec，厚度為2m，中間層的剪力波速假設為350m/sec，厚度為2m，底層的土壤剪力波速假設為500m/sec。圖10為三層土層在篩選標準 $S=\lambda$ 之表面波頻散曲線，從圖中波長在4m內速度約在173~182m/sec之間，而波

長在4m以上其速度約在320~470m/sec之間，因此根據土層厚度約為波長之一半，判定表土層厚度為2m。但是在圖中不易辨識中間層跟底層土層的分界面。

4、現地試驗之結果與討論

為了驗證本研究發展推估表面波波速的方法之可行性，本研究在朝陽科技大學非破壞檢測場進行表面波試驗，將試驗所得的速度歷時反應以複數型Morlet小波進行連續小波轉換，以本研究發展的方法來繪製現地之頻散曲線。非破壞檢測場地表層為棕黃色岩塊石夾粉土質細砂，8m以下則是灰色砂岩。試驗設備如下：震波震測數據擷取系統、震測數據擷取卡、電磁式速度計、電纜線、10公斤的大型鐵錘、螢幕與滑鼠及鍵盤。

本試驗的試驗過程簡述如下：(1)試驗開始前先將速度計放置距離振源1m~12m等12個位置(測站)上。(2)於振源處敲擊15次取其平均值，以過濾雜訊得到較為準確的速度歷時反應。(3)將速度歷時反應進行連續小波轉換，將轉換後之實部與虛部結果計算模值。(4)以本研究之訊號篩選標準進行數據篩選，因現地試驗收波器訊號擷取時間間隔與數值模擬不同，因此訊號篩選標準須進行修正，現地試驗之訊號篩選標準如表4所示，再由兩相鄰位置(測站)模值的第一峰值之時間差，計算表面波波速及波長，再繪製成表面波頻散曲線如圖11所示。

由圖11可看出波長約在7m內，其相速度約為208~294m/sec之間，而波長大於7m相速度有逐漸增加之趨勢，因此根據土層厚度約為波長之一半，推估出上覆土層厚度為3.5m。

5、結論

本研究應用連續小波轉換來分析土層表面波波速，做了一系列的分析以探討其應用之可行性，對土層之厚度、波速及篩選標準等參數進行討論，得到以下之結論：

1. 本研究發展的時頻方法，大致上可以從土層表面波頻散曲線推估出表土層之厚度及對應之波速。
2. 若土層太薄時可能無法用本研究發展的方法偵測出來，多層土層之下方土層的介面位置也不易辨識出其位置。
3. 本研究之結果發現訊號篩選標準為 $S=\lambda$ 之土層厚度約為表面波波長之一半，此跟過去的研究結果相同。

6、參考文獻

- 1、Rayleigh, L., "On Waves Propagated Along the Plane Surface of an Elastic Solid," London Mathematical Society Proc, 1885.
- 2、Richart, F. E., Hall, J. R., and Woods, R. D., Vibrations of Soils and Foundations, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1970.

- 3、江福壽，「頻散曲線評估土層剪力波速剖面之初步研究」，碩士論文，國立成功大學土木工程研究所，台南，2004。
- 4、Ganji V, Gucunski N, Nazarian S. "Automated inversion procedure for spectral analysis of surface waves." JOURNAL OF GEOTECHNICAL AND GEOENVIRONMENTAL ENGINEERING, Vol.124, AUGUST, 1998, pp. 757-770.

表1 分析案例之參數設定

案例	層次	厚度 (m)	剪力波速 (m/sec)	剪力模數 (MPa)	體積模數 (MPa)	單位重 (kN/m ³)	柏松比
1	1	30	200	72	120	17.66	0.25
2	1	1	200	72	120	17.66	0.25
	2	29	500	525	875	20.6	0.25
3	1	2	200	72	120	17.66	0.25
	2	28	500	525	875	20.6	0.25
4	1	3	200	72	120	17.66	0.25
	2	27	500	525	875	20.6	0.25
5	1	2	200	72	120	17.66	0.25
	2	2	350	232.75	389.17	18.64	0.25
	3	26	500	525	875	20.6	0.25

表2 表面波譜法有效波長篩選標準【4】

篩選標準來源	第一收波器距振源距離	收波器間隔
Lysmer (1966)	$2.5\lambda < S$	-
Heisy et al. (1982)	$0.33\lambda < S < 2\lambda$	$S = D$
Sanchez-Salinerio (1987)	$2\lambda < S$	$S = D$
Rosset et al. (1989)	$0.5\lambda < S < 2\lambda$	$0.5\lambda < D < \lambda$
Gucunski and Woods (1992)	-	$0.5\lambda < D < 4\lambda$
Tokimatsu et al. (1991)	$0.25\lambda < S + 0.5D$	$0.0625\lambda < D < \lambda$

註： λ =表面波波長； S =第一收波器距振源之距離； D =收波器間隔

表3 本研究之訊號篩選標準

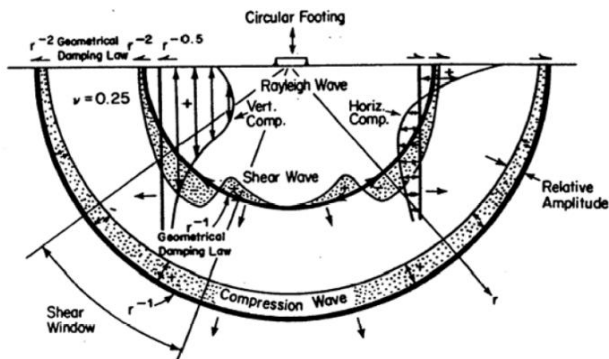
接收器距振源之距離(S)	頻率選取範圍(Hz)	尺度(a)對應之範圍
3m	66.7~200	25~75
4m	50~150	33~100
5m	40~120	41.7~125
6m	33.3~100	50~150
7m	28.6~85.7	58~175
8m	25~75	66.7~200

表3(續) 本研究之訊號篩選標準

接收器距振源之距離(S)	頻率選取範圍(Hz)	尺度(a)對應之範圍
9m	22.2~66.7	75~225
10m	20~60	83.8~250
11m	18.2~54.5	91.7~275

表4 本研究現地試驗之訊號篩選標準

接收器距振源之距離(S)	頻率選取範圍(Hz)	尺度(a)對應之範圍
3m	66.7~200	2.5~7.5
4m	50~150	3.3~10
5m	40~120	4.17~12.5
6m	33.3~100	5~15
7m	28.6~85.7	5.8~17.5
8m	25~75	6.67~20
9m	22.2~66.7	7.5~22.5
10m	20~60	8.38~25
11m	18.2~54.5	9.17~27.5



Wave type	% of total energy
Rayleigh	67
Shear	26
Compression	7

圖1 圓形振動基腳於半無限域產生之波
能量衰減情形【1】

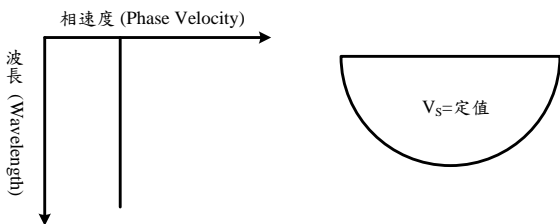


圖2 半無限空間表面波無頻散現象【2】

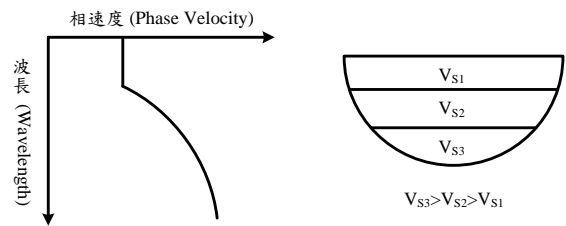


圖3. 層狀土層中表面波之頻散現象【2】

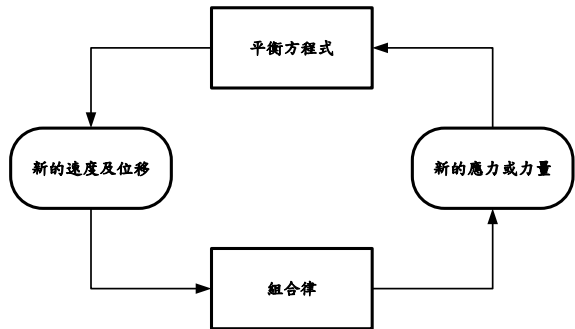


圖4 FLAC程式運算之步驟

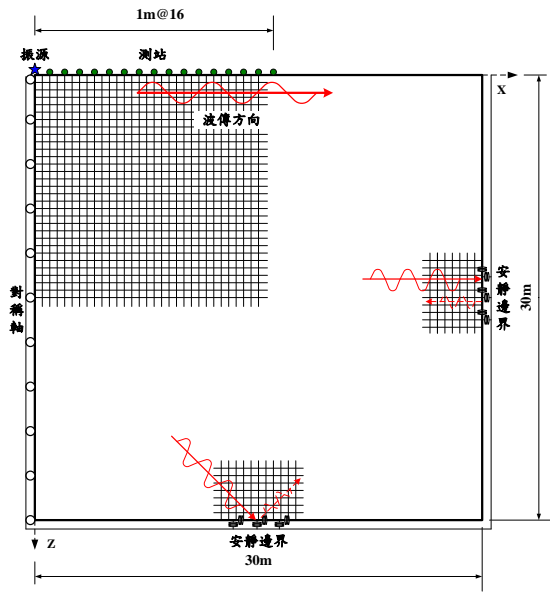


圖5 FLAC網格式意圖

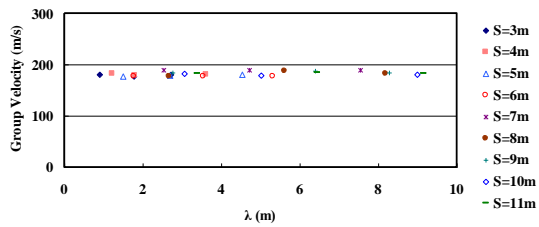


圖6 單層土層表面波頻散曲線

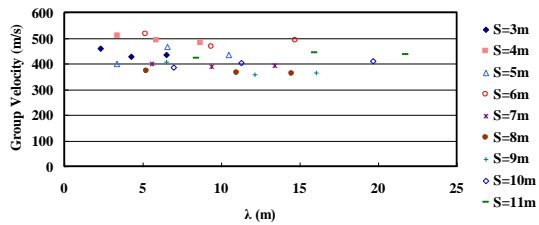


圖7 雙層土層(表土層厚度1m)表面波頻散曲線

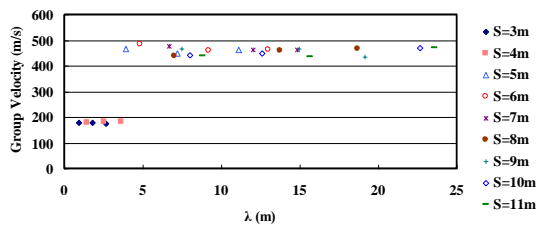


圖8 雙層土層(表土層厚度2m)表面波頻散曲線

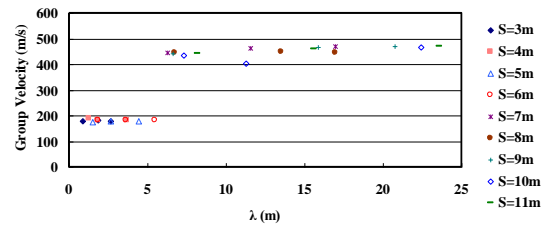


圖9 雙層土層(表土層厚度3m)表面波頻散曲線

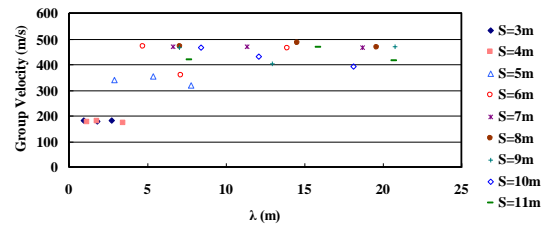


圖10 之三層土層表面波頻散曲線

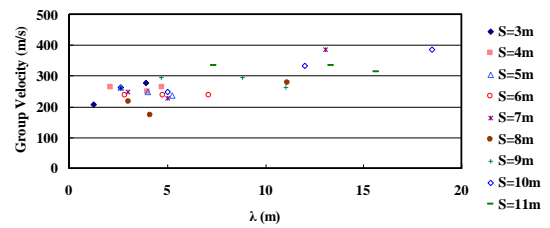


圖11 現地試驗土層表面波頻散曲線