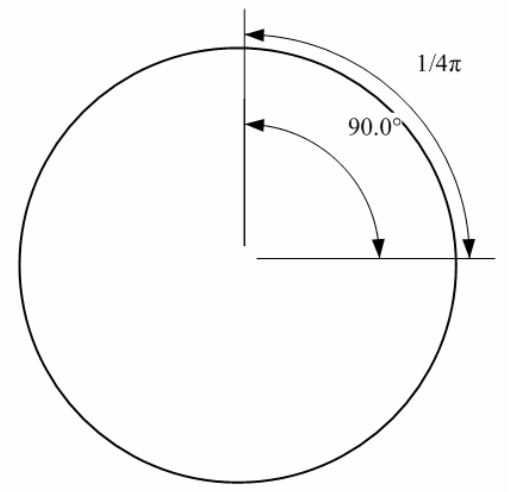
三、　三角函數

3.1 度與弧



■ 角度定義

角度是用以量度角的單位，符號為 ”°“。一圓周角分為 360 等份，每份定義為 1 度(1°)。

■ 弧度定義

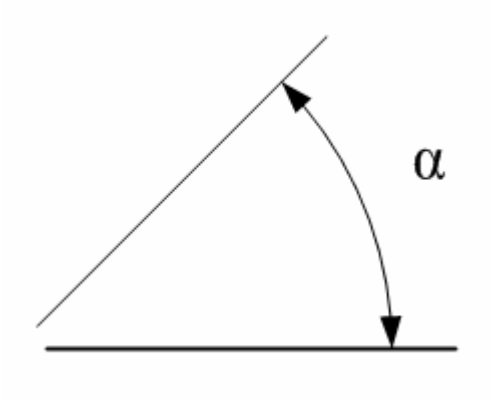
弧度又稱弳度，在數學和物理中是角的量度單位，也是國際單位制導出單位。單位弧度定義為圓弧長度等於半徑時的圓心角。角度以弧度給出時，通常不寫弧度單位，或有時記為 rad。

■ 弧度與角度的互化

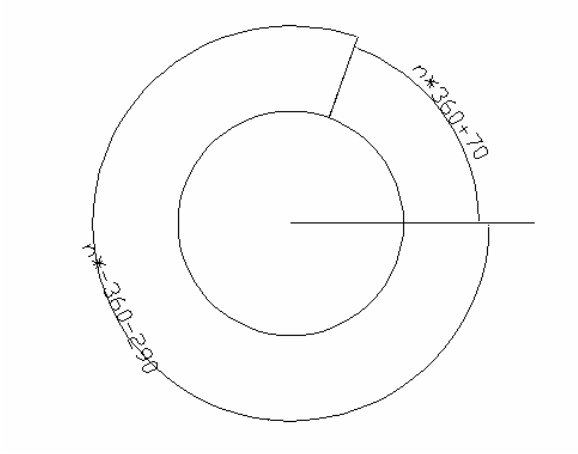
$$\text{弧度}=\text{角度}\times\frac{\pi}{180}$$

■ 有向角與同界角

1.有向角



2.同界角



3.最大負同界角與最小正同界角

設一角度為 θ，

若 α 為 θ 之正同界角中最小者，稱 α 為 θ 之最小正同界角

若 β 為 θ 之負同界角中最大者，稱 β 為 θ 之最大負同界角

例如：775°之最大負同界角與最小正同界角

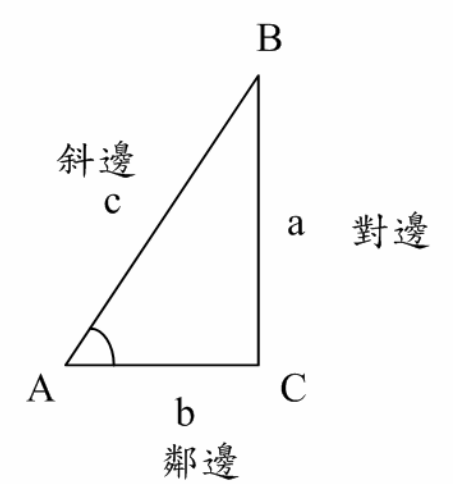
775°=**<u>35°</u>**+360°×2，35°為 775°之最小正同界角

775°=-**<u>335°</u>**+360°×3，-335°為 775°之最大負同界角

3.2 三角函數基本性質

■ 基本函數

函數	數學符號	關係
正弦	sin	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\csc\theta}$
餘弦	cos	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sec\theta}$
正切	tan	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cot\theta}$
餘切	cot	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$
正割	sec	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cos\theta}$
餘割	csc （或 cosec）	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sin\theta}$



■ 銳角三角函數

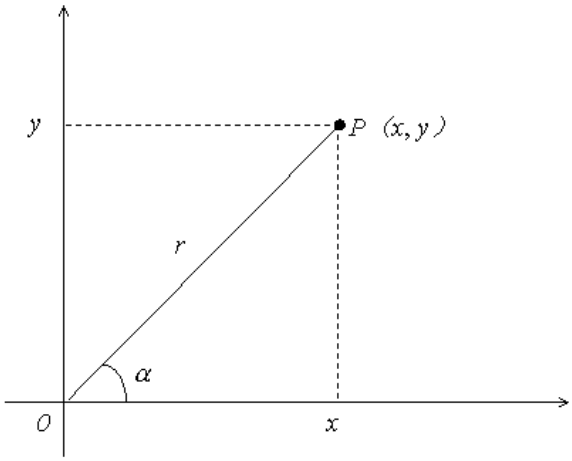
在直角三角形中僅有銳角三角函數的定義

一個銳角的正弦是它的對邊與斜邊的比值。在圖中，sinA＝ 對邊/斜邊 ＝a/c。

一個銳角的餘弦是它的鄰邊與斜邊的比值。在圖中，cosA= 鄰邊/斜邊 ＝ b/c。

一個銳角的正切是它的對邊與鄰邊的比值。在圖中，tanA＝ 對邊/鄰邊 ＝a/b。

■ 廣義三角函數

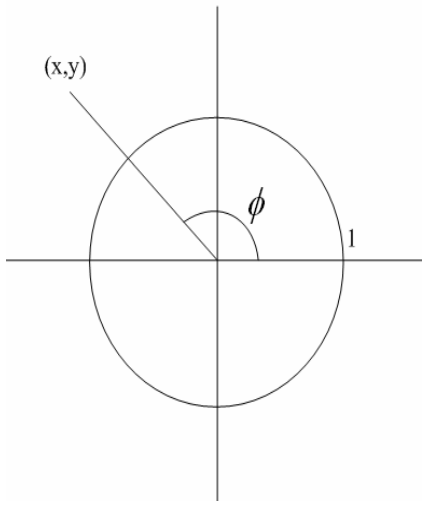


設 α 是平面直角坐標系 ***x-y*** 中的一個象限角，P(x, y)是角的終邊上一點，$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$ 是 P 到原點 o 的距離，則 α 的六個三角函數定義為：

函數名	定義	函數名	定義
正弦	$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$	餘弦	$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$
正切	$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$	餘切	$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$
正割	$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$	餘割	$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$

$$\sin\phi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\phi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



當 $0<\phi\le 90^\circ$ 時，$0<\sin\phi\le 1$ 且 $0\le\cos\phi<1$

當 $90^\circ<\phi\le 180^\circ$ 時，$0<\sin\phi\le 1$ 且 $-1\le\cos\phi$

當 $180^\circ<\phi\le 270^\circ$ 時，$-1\le\sin\phi<0$ 且 $-1\le\cos\phi\le 0$

當 $270^\circ<\phi\le 360^\circ$ 時，$-1<\sin\phi\le 0$ 且 $0<\cos\phi\le 1$

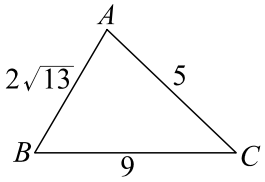
EX1.

θ 為銳角，若 3sinθ= 4cosθ，求 tanθ +cotθ= ？

Ans: tanθ=$\frac{4}{3}$，cotθ=$\frac{3}{4}$　則 tanθ +cotθ= $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}=\frac{25}{12}$ 。

EX2.

如右圖，∠B 為銳角，求 sinB =？



Ans：$\frac{2}{\sqrt{13}}$

EX3.

點(cot 320°, sec 320°)在第幾象限？若θ 非象限角，且 tanθ> 0，cosθ <0，則點(cosθ, sinθ)在第幾象限？

Ans:

(-,+)為第二象限角。

θ 為第三象限角　∴(cosθ, sinθ) ⇒ (-,-)亦為第三象限角。

EX4.

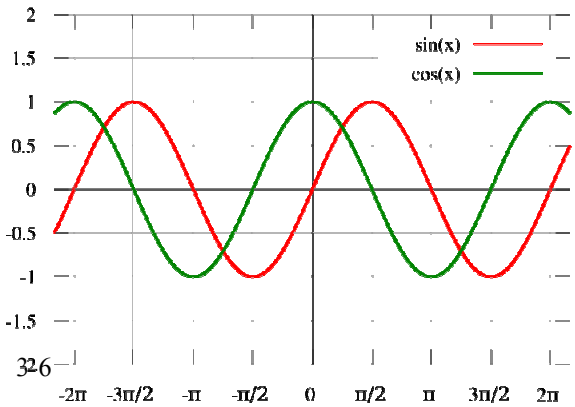
sin 86°=a，試以 a 表示 sin 1976°。

Ans: (2cosθ-5)(2cosθ +1) = 0，cosθ =$-\frac{1}{2}$　∴ $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=1$ 。

3.3 三角函數特性

■ 三角函數週期圖形

三角函數為週期函數



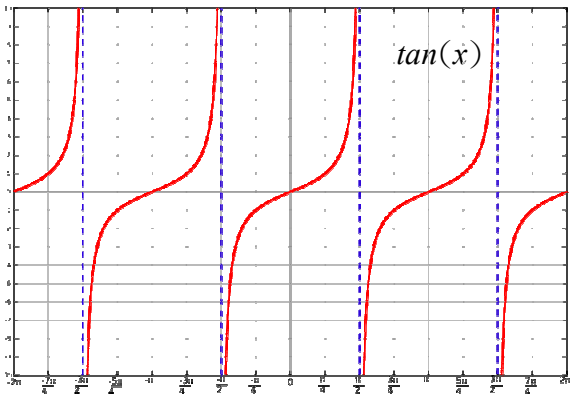
$$\sin\theta = \sin(\theta + 2\pi k)$$

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi k)$$

週期函數的最小正週期叫做這個函數的「基本週期」(primitive period)。正弦、餘弦、正割或餘割的基本週期是全圓，也就是 2π 弧度或 360 度；正切或餘切的基本週期是半圓，也就是 π 弧度或 180 度。上面只有正弦和餘弦是直接使用單位圓定義的，其他四個三角函數可以定義為:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



在正切函數的圖像中，在角 kπ 附近變化緩慢，而在接近角 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 的時候變換迅速。正切函數的圖像在 $\theta = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 有垂直漸進線。這是因為在 θ 從左側接進 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 的時候函數接近正無窮，而從右側接近 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 的時候函數接近負無窮。

EX1.

下列各週期函數中，週期為 π 者有

(A) $y = |\sin x|$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \cot x$ (D) $y = \sec x$ (E) $y = \tan x + \cot x$

Ans: (A)(B)(C)(E)

3.4 複角三角函數

■ 複角三角函數

1. 複角公式：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

EX. $\sin 75^\circ=?$

$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin30^\circ\cos45^\circ+\cos30^\circ\sin45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$

■ 倍角公式

$\sin2x=2\sin x\cos x$

$\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$

$\tan2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x}$ ；

註：$\sin3x=3\sin x-4\sin^3x$ ；$\cos3x=4\cos^3x-3\cos x$

又 $\sin^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}$ ；$\cos^2x=\dfrac{1+\cos2x}{2}$

EX. $\tan120^\circ=?$

$\tan120^\circ=\dfrac{2\tan60^\circ}{1-\tan^2 60^\circ}=\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=4\sqrt{3}$

■ 半角公式

$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

附註：設 $\tan\frac{x}{2}=t$，則 $\sin x=\frac{2t}{1-t^2}$ ；$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ ；$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$.

EX. 假設 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ ，試求 $\sin(\frac{\alpha}{2})=?$

$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\frac{1}{2}$

■ 和差化積、積化和差

1.和差化積：

$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$　　$\sin A+\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$　　$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

2.積化和差：

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$　　$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$　　$-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$