四、 向量

4.1 純量與向量.....
純量.....2
向量.....2
4.2 向量表示法.....2
向量的幾何意義.....2
向量的座標表示法.....3
4.2 向量運算.....3
向量的分解與合成特性.....3
4.3 空間向量與直線平面.....6
空間向量的絕對值.....6
空間向量的內積.....6
體積與面積.....7
空間向量的方向角.....7
空間中的平面.....8
空間中的直線.....9

4.1 純量與向量

■ 純量

指在坐標變換下保持不變的物理量。例如，三維空間中兩點間的距離在坐標變換下保持不變，相對論四維時空中時空間隔在坐標變換下保持不變。以此相對的向量，其分量在不同的坐標系中有不同的值，例如速度。純量即是只有大小，沒有方向的量。

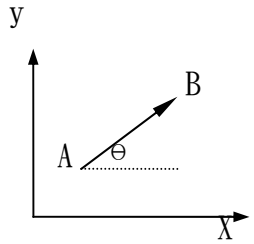
■ 向量

向量又稱矢量(Vector)，指線性空間中的元素。起源於物理學既有大小又有方向的物理量，通常繪畫成箭號，因以為名。位移、速率、加速度、力、力矩、動量、衝量等，都是向量。向量即有大小，又有方向的量。

4.2 向量表示法

■ 向量的幾何意義

如圖示，將起點 A 與終點 B 以有向射線連接，並註明兩點間之距離及射線之方向（即與水平線之夾角）的觀念，就是向量。簡言之，向量就是一具有大小（或長度）及方向的射線。向量的表示符號為 $\overline{AB}$，而其大小則表為 $\left|\overline{AB}\right|$。



■ 向量的座標表示法

1. 以 x，y 為兩軸的座標平面上，若 vv×(a,b)，則 a 為 *vv* 的 x 分量，b 為 *vv* 的 y 分量。以 x，y，z 三軸的空間座標中，若 *vv*=(a,b,c)，則 a 為 *vv* 的 x 分量，b 為 *vv* 的 y 分量，c 為 *vv* 的 z 分量。

2.零向量：原點 O 的位置向量為(0，0，0)，稱為零向量。

3.向量相等：兩位置向量相等之充要條件是其終點所在的位置一致設 $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$，則 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，$z_1 = z_2$。

4.設空間中兩點 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，則位置向量 $vv = AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$。

p.s 當 $O(0,0,0)$，$P(x, y, z)$，則 $vv = OP = (x, y, z)$。

5.空間中 x，y，z 三軸上的基本向量為：

$i_v = (1,0,0)$，$j_v = (0,1,0)$，$k_v = (0,0,1)$

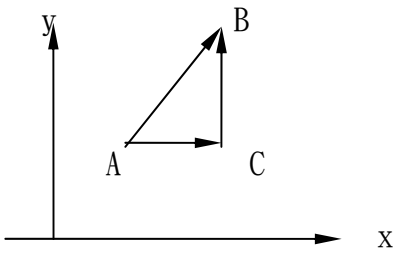
即 $vv = (a,b,c) = a \cdot i_v + b \cdot j_v + c \cdot k_v$，反之亦同。

4.2 向量運算

■ 向量的分解與合成特性

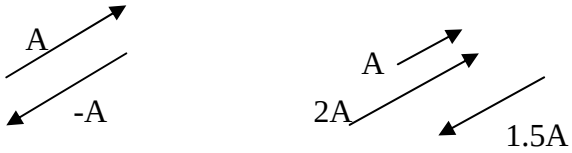
如圖示，從 A 到 B 的行程(向量)可以想成是先由 A 到 C 再由 C 到 B 的行程組合，亦即 $\overrightarrow{AB}$ 可想成是 $\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{BC}$ 的合成等效結果，而 $\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{BC}$ 即代表 $\overrightarrow{AB}$ 的分量。向量的分解方式有無窮多種，通常依選用之座標系統決定最方便的分解方式，在直角座標系下，多以水平及垂直分量來分解向量。

直角座標系



1.向量與純量的乘法與除法

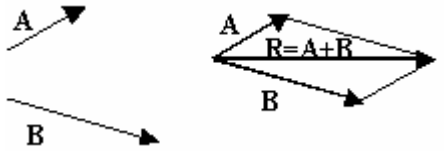
向量 A 與純量 a 之乘積，以 aA 表示，其結果仍為一向量，此向量的大小為 |aA|，方向則視 a 值之正負號而定。若 a 為正值，則 aA 之方向與 A 相同；若 a 為負值，則 aA 之方向與 A 相反。因此，負的向量是將原向量乘以（-1）而得，如左下圖所示。向量與純量的除法可用乘法定律來定義，因為 $A/a=(1/a)A$，$a\neq 0$，此運算的圖形範例如下圖所示。



2.向量加法

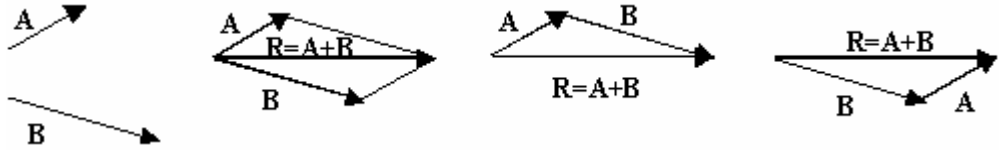
平行四邊形法如下圖所示：

兩向量 A 與 B，可利用平行四邊形定律相加，其和以 $R=A+B$ 表示，。作法是將 A、B 兩向量之箭號尾部放置在同點上，然後以 A 與 B 為兩邊畫一平行四邊形，則通過箭號尾部的對角線就是向量和 R。

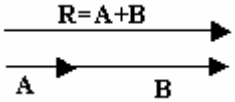


三角形法如下圖所示：

藉由平行四邊形定律，可導出另外一種方法來求兩個向量之和，稱之為三角形法(triangle construction)。此方法是將向量 B 箭號尾部與向量 A 箭號頭部相接，然後由向量 A 箭號尾部至向量 B 箭號頭部作一向量 R，則 R 即為兩向量 A 與 B 之和。若以相反次序相加，亦可得到相同的向量 R，由此可知向量的加法運算符合交換律，即 $R=A+B=B+A$。

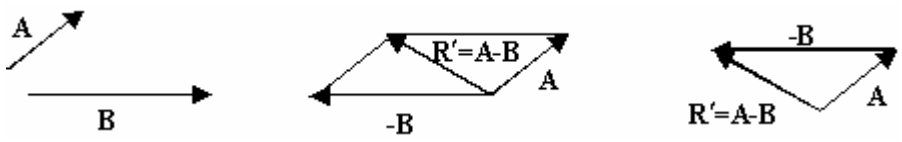


若 A、B 兩向量為共線，方向相同或相反，其加法運算與一般的代數運算相同，即 $R=A+B$，如下圖所示。



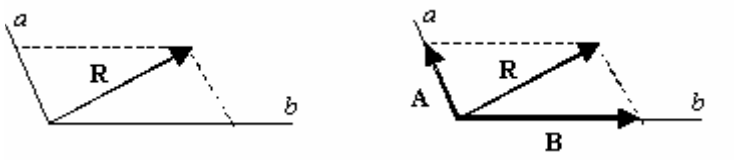
3.向量減法

向量 A 減向量 B 可寫成$R' = A - B = A + (-B)$，其結果可定義為向量 A 與向量 B 之反方向向量 $-B$相加所得之向量，如下圖所示。故向量減法的運算可視為加法運算的一種特例，有關加法運算之法則，亦可適用於減法運算。



4.向量分解

利用平行四邊形定律，可將一向量分解為兩已知方向上的分量。如下圖所示，將向量 R 分解成 a、b 線上的兩個分量，可由 R 之頭部作兩平行線分別平行於 a、b 直線，由其與 a、b 直線的交點，即可作出兩分量 A 與 B。



4.3 空間向量與直線平面

■ 空間向量的絕對值

1. 設 $A(x_1, y_1, z_1)$， $B(x_2, y_2, z_2)$ 為空間中二點，

則向量 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$=(x2 - x1, y2 - y1, z2 - z1)，

向量 AB 的長度為 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

2. 空間向量 $\vec{v} = (a, b, c)$，

A, b, c 分別稱為 $\vec{v}$ 的 x 分量、y 分量、z 分量，

$$|\vec{v}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

■ 空間向量的內積

1. 設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中二向量，假設兩向量間夾角為 θ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積定義為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其坐標表示法為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

2. 設 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 為空間中三向量，則:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

(4) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

3. 空間向量的正射影(投影量)，設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 為空間中二向量，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的正射影為 $(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$

■ 體積與面積

1. 面積公式:

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中二向量，則此二向量其所張的平行四邊形面積為 ：

$$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}$$

2. 體積公式:

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 為空間中三向量，

則此三向量其所張的平行六面體體積為 $\Delta=\left\|\begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{matrix}\right\|$。

又此三向量其所張的四面體體積為 $\frac{1}{6}\Delta$。

■ 空間向量的方向角

設空間向量 $v=(a,b,c)$，定點 $A(a,b,c)$，則 $\vec{v}=\overrightarrow{OA}$。若 $\overrightarrow{OA}$ 與 x 軸, y 軸, z 軸的

正向夾角為 α, β, γ，其中 $0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi 0$，則稱 α, β, γ 為 $\vec{v}$ 的方向角，

$\cos\alpha=\frac{a}{|\vec{v}|}$，$\cos\beta=\frac{b}{|\vec{v}|}$，$\cos\gamma=\frac{c}{|\vec{v}|}$ c 稱為 $\vec{v}$ 的方向餘弦 $|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 所以 ：

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。

■ 空間中的平面

1. 平面方程式

(1)點向式: 過點 $P(x_0, y_0, z_0)$，且法線向量為 $\vec{n}=(a,b,c)$ 之平面方程式為

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

(2)一般式：$ax+by+cz+d=0$， $a,b,c,d \in R$

(3)截距式：一平面交三坐標軸於 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$，且 $abc \neq 0$。

平面方程式為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

2. 平面族方程式

設 E1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，(E1 , E2 不平行)則過 E1、E2 交線之所有平面方程式可設為 ：

kE1 + E2 = 0（不包含 E 1） 或 E1 +kE2 = 0（不包含 E 2）。

3. 二平面的夾角

E1：$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \Rightarrow \vec{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$

E2：$a_2x+b_2+c_2z=d_2 \Rightarrow \vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$

(1) $\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ （另一交角為 $\pi-\theta$ ） (2) $E1 \perp E2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$。

4. 點到平面的距離：

(1)給定一平面 E：$ax+by+cz+d=0$ 及一點 $P_0(x_0,y_0,z_0)$

$\Rightarrow D_{(E,P)}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(2)若 E1：$ax+by+cz+d_1=0$，E2：$ax+by+cz+d_2=0$

$\Rightarrow D_{(E1,E2)}=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

5. 二面角的平分面 ：

平面 E1： $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 與平面 E2： $a_2x+b_2+c_2z+d_2$ 所夾二面角的

平分面方程式為 $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2}}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}+c_2^{\ 2}}}$

EX1.平面方程式 $(3x-y+z+1)+K(x-2y-z+4)=0$ ，若過點 $(-2,1,5)$ 求(1) $K=?$ (2)方程式=?

Sol:

(1) $(-2,1,5)$ 代入平面方程式 $\Rightarrow(-6-1+5+1)+K(-2-2-5+4)=0$

$\Rightarrow K=-\dfrac{1}{5}$

$\therefore(3x-y+z+1)-\dfrac{1}{5}(x-2y-z+4)=0$

$\Rightarrow 14x-3y+6z+1=0$

EX2.設 A(1,2,3)，E: $x-2y+3z=4$ ，若平面 $F:ax+by+z=0$ 包含 A 且與平面 E 垂直，則

$a+b=?$

Sol:

(1) F 平面通過 A(1,2,3) $\Rightarrow a-2b+3=0$

（2）$E\perp F \quad\Rightarrow\ (1,-2,3)\cdot(a,b,1)=0=a-2b+3=0$

$\therefore\begin{cases}a+2b=-3\\a-2b=-3\end{cases}\ \Rightarrow\ b=0,a=-3$

■ 空間中的直線

設直線 L 的方向向量為(a, b, c)，且過定點 $(x_0,y_0.z_0)$ ，則 L 的

(1)對稱比例式： $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

(2)參數式：$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}=t$ $\Rightarrow$ L：$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \quad (t\in R) \\ z=z_0+ct \end{cases}$

(3)二平面 E1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 與 E2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 之

交線的方程式為 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

其方向向量為（$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$）。

EX1. 空間中有兩個點 $(1,2,3)$ 及 $(3,2,1)$，請寫出這條直線方程式。

Sol: 法向量 $\bar{n}=(1-1,2-(-1),3-2)\Rightarrow(0,3,1)$

其中 $x=1$，故 $\begin{cases} \dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1} \\ \dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1} \end{cases}$ or $\begin{cases} \dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-1} \\ \dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{-1} \end{cases}$

EX2. 請判別 $L_1:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ 與 $L_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+14}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ 是否相交?若相交，求交點。若不相交，求平行 L_1，但包含 L_2 之平面的方程式。

Sol: 參數式 $L_1:\begin{cases} x=4t+2 \\ y=-t-1 \\ z=2t+3 \end{cases}$，代入 $L_2\Rightarrow\dfrac{(4t+2)+2}{2}=\dfrac{(-t-1)+14}{3}=\dfrac{(2t+3)-1}{1}$

$$\Rightarrow\frac{4t+4}{2}=\frac{-t+13}{3}\Rightarrow 12t+12=-2t+26$$

$$\Rightarrow t=1$$

$t=1$ 代入 L_1，$\because$ 3 項皆相等 $\therefore$ 有交點

$t=1$ 代入參數式 $\Rightarrow x=6, y=-2, z=5$