六、　矩陣

6.1 線性方程組與行列式運算

■　線性方程組

設有單一線性方程式 $ax+by=c$，其中 a、b、c 為實數。其圖形為 xy-平面上的一條直線，若將此線性方程式推廣到 n 個變數則可得到如下結果。

(a) n 個變數 $x^1, x^2, x^3, ..., x^4$ 的線性(一次)方程式為如下的形式：

$a_1x_1+a_2x_2+.....+a_nx_n=b$，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_x$，$b \in \boldsymbol{R}$

(b)由若干個 n 個變數的線性方程式所組成的集合稱為聯立方程組：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+....+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+....+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+....+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

其中 a 及 b 均為實數

■　方程式的解

聯立方程組 $\begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{matrix}$ 的解，有下列三種可能：

(1) 恰有一解，例如 $\begin{matrix} x+y=3 \\ x-y=1 \end{matrix}$ 恰有一解 (2,1)，此即為兩直線 $x+y=3$ 及 $x-y=1$ 之交點。

(2) 無解，例如 $\begin{matrix} x+y=4 \\ 2x+2y=5 \end{matrix}$ 無解，而兩直線 $x+y=4$ 及 $2x+2y=5$ 平行。

(3) 無限多組解，例如 $\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{matrix}$ 有無限多組解，兩直線 $x+y=2$ 及 $2x+2y=4$ 重合，因此代表兩者為同一直線，而直線上的點均為聯方程組之解。

■ 行列式

在線性代數，行列式是一個函數，其定義域為$n\times n$的矩陣 A，值域為一個純量，寫作 $\det(A)$ 。

矩陣 A 的行列式有時也記作 |A|。絕對值和矩陣範數也使用這個記法，有可能和行列式的記法混淆。此外，矩陣的絕對值是沒有定義的。因此，行列式經常使用垂直線記法。

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

行列式 $\det(A)$ 也寫作 $|A|$ ，或明確的寫作：

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

即矩陣的方括號以細長的垂直線取代。

■ 行列式值

所有任取n個不同行且不同列之元素乘積付予正或負之總和稱為行列式的值，其行列的排序是偶排列之項付予正號，否則付予負號。(n階行列式之展開式有$n!$項)

如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

■ 階行列式的性質

行列式中，行的元素與列的元素依序互換，行列式值不變。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(2)行列式中，兩行(列)的元素互調，行列式值變號。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$

(3)行列式中，某一行(列)的元素均為 0，行列式值為 0。

例如 $\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

(4)行列式中，兩行(列)的元素對應相等或成比例，行列式值為 0。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \end{vmatrix} = 0$

(5)行列式中，任一行(列)的元素可提出其公因數。

例如 $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(6)行列式中，某一行(列)的元素可分成二行(列)元素的和，則行列式可分解成兩個行列式的和。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

(7)行列式中，任一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)，行列式值不變。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1+b_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2+b_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1+a_2 & kb_1+b_2 & kc_1+c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

EX1.試就實數 k 之值，試討論方程組 $\begin{cases} (k+1)x+4y=4 \\ x+(k-2)y=1 \end{cases}$ 。

Sol：k≠3 且 k≠–2，方程組有唯一解；k=3，解 x=1–t，y=t；k=–2，無解

EX2. 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=2，

(1)求 $\begin{vmatrix} 3a & 12b \\ c & 4d \end{vmatrix}=?$ (2)求 $\begin{vmatrix} 5a-7b & 4a+3b \\ 5c-7d & 4c+3d \end{vmatrix}=?$

Sol：

，

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc=2$

(2) $\begin{vmatrix} 3a & 12b \\ c & 4d \end{vmatrix} = 12ad-12bc=12(ad-bc)=12(2)=24$

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 5a-7b & 4a+3b \\ 5c-7d & 4c+3d \end{vmatrix} = (5a-7b)(4c+3d)-(5c-7d)(4a+3b) \\
&=20ac+15ad-28bc-21bd-20ac-15cb+28ad+21bd \\
&=15ad-15cb-28bc+28ad \\
&=15(2)+28(2) \\
&=30+56 \\
&=86
\end{aligned}$$

EX.3 設矩陣 A= $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(1)試求矩陣 A 所對應的方程組 L。

(2)化矩陣 A 為簡化矩陣。

Sol: (1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} ax+by+cz+d \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \Rightarrow (a)\times -2+(b),(a)\times -3+(c) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 3 & 5 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{(b)\times -1+(c)\}\times \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \times \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (b)\times 2+(a) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (c)\times \frac{9}{5}+(b),(c)\times \frac{3}{5}+(a) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ans：(1)L：$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-3 \\ 3x-y+2z=6 \end{cases}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6.2 高斯消去法

高斯消去法實質上分成兩部份:

一是消去部份將矩陣 A 利用列運算求得上三角矩陣

二是反代(Backward Substitution)部份來求得所要的答案

吾人假設一方程組如下所示：

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$ ==> Row1，以下以 R1 表示
$4x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 20$ ==> Row2，以下以 R2 表示
$3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 30$ ==> Row3，以下以 R3 表示

將該方程組 R2、R3 經過下列運算
$-4/2 \times (R1) + (R2) \text{ --> } R2$
$-3/2 \times (R1) + (R3) \text{ --> } R3$
整個方程組被改寫為
$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 10$ => Row1
$11x_2 - 3x_3 = 0$ => Row2
$-3/2x_2 + 3/2x_3 = 15$ => Row3
再進行以下的列運算：
$(3/2) \times (1/11) \times (R2) + (R3) \text{ --> } R3$
可以得到：
$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 10$ => Row1
$11x_2 - 3x_3 = 0$ => Row2
$24/22x_3 = 15$ => Row3
反代：
Row 3： $x_3 = 15/(24/23)$
Row 2： $x_2 = 3 \times x_3/11$
Row 1： $x_1 = (-5x_3 + 3x_2)/2$

以上方程組若以矩陣表示則為

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Bmatrix}$$

$$=> \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Bmatrix}\begin{matrix} -> R1 \\ -> R2 \\ -> R3 \end{matrix}$$

$$=> \begin{matrix} R1 & -> \\ -4/2\times(\mathrm{R1})+(\mathrm{R2}) & -> \\ -3/2\times(\mathrm{R1})+(\mathrm{R3}) & -> \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}\begin{matrix} -> R1 \\ -> R2 \\ -> R3 \end{matrix}$$

$$=> \begin{matrix} R1 & -> \\ R2 & -> \\ (3/2)\times(1/11)\times(\mathrm{R2})+(\mathrm{R3}) & -> \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 24/22 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}\begin{matrix} -> R1 \\ -> R2 \\ -> R3 \end{matrix}$$

$=> \mathrm{x}_3 = 15/(24/23)$

$\mathrm{x}_2 = 3\times \mathrm{x}_3/11$

$\mathrm{x}_1 = (-5\mathrm{x}_3 + 3\mathrm{x}_2)/2$

EX1.試以高斯消去法求解：$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+5y+2z=-1 \quad \cdots(1^*) \\ 7x+17y+5z=-1 \end{cases}$

Sol：$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 7 & 17 & 5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-7R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{R_3-3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

因此$\begin{cases} x-9z=12 \\ y+4z=-5 \\ 0=0 \end{cases}$與(1*)等價，令 $z=t$ ，則$\begin{cases} x=9t+12 \\ y=-4t-5 \end{cases}$

該方程組解集合為$\{(9t+12, -4t-5, t) \mid t\in R\}$

6.3 克拉馬公式

本式為求解二元一次方程組之方法，其方法如下：

設一方程組 $\begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1-(a) \\ a_2x+b_2y=c_2-(b) \end{matrix}$

由加減消去法產生行列式公式

由 $(a)\times b_2-(b)\times b_1$ 得 $(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$ ，即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}-(c)$

由 $(b)\times a_1-(a)\times a_2$ 得 $(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1$ ，即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}-(d)$

因此可得， $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ， $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

當(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ ，此方程是恰有一組解

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ ，但 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 或 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$ ，此方程組無解(兩相異直線互相平行)

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ ， $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ ，此方程是有無限多組解(兩直線重合)

EX1.要合成 40%之食鹽水 900 公升，需要 15%與 60%的食鹽水各幾公升?

Sol：設 15%的食鹽水 x 公升，60%食鹽水 y 公升

$$\begin{cases} x+y=900 \\ \dfrac{15}{100}x+\dfrac{60}{100}y=\dfrac{40}{100}\times 900 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=900 \\ x+4y=2400 \end{cases}$$

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=3$ ， $\Delta_x=\begin{vmatrix} 900 & 1 \\ 2400 & 4 \end{vmatrix}=1200$ ， $\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 900 \\ 1 & 2400 \end{vmatrix}=1500$

$\therefore x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{1200}{3}=400$ ， $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{1500}{3}=500$

15%食鹽水 400 公升，60%食鹽水 500 公升