一、　概論(邏輯、集合、數) .....
1.1 邏輯..... 2
1.2 集合..... 4
集合簡介 4
集合的運算 4
笛摩根定律 4
1.3 因數與倍數..... 6
因數與倍數 6
1.4 無理數與實數..... 8
無理數 8
實數 8
1.5 複數..... 9
複數 9
共軛複數與複數的絕對值 9
一元二次方程式的根 9

一、　概論(邏輯、集合、數)

1.1 邏輯

1.常見數學邏輯符號

“ ~ ” 表示 “ 否定 ”　　EX. ~p
“ ^ ” 表示 “ 且 ”　　EX. ~(p^q)
“∨” 表示 “ 或 ”　　EX. $p \vee \sim q$”
“∃” 表示 “ 存在 ”　　EX. ∃ n ∈ N: n 是偶數
“∀” 表示 “ 對所有 ”　　EX. ∀ n ∈ N: $n^2 \geq n$

2.命題法

當命題「若 p 則 q」是正確時，稱 p 為 q 的「充分條件」，q 為 p 的「必要條件」。

“若 p 則 q”成立且其逆命題“若 q 則 p”也成立，則 p 是 q 的充要條件，q 也是 p 的充要條件。

歸謬證法：要證“若 p 則 q”的命題，可以假設 p 成立而 q 不成立，然後推出這樣的假設下所導致的矛盾。

反證法：要證“若 p 則 q”，只要證明“若 q 不成立，則 p 不成立」即可。

原命題：p ⇒ q

逆命題：q ⇒ p

否(定)命題：$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

逆否命題（對偶命題）：$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

等價命題：例「p ⇒ q」與「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」為等價命題。

EX1.

數學兼哲學家伽利略於西元 1632 年出版《對話錄》一書觸怒教廷，後來在他 70 歲時，

接受宗教法庭審判且於該年被判終身監禁，之後在獄中過世，享年 78 歲。出版《對話錄》一書到過世是伽利略人生中最灰暗的 10 年。伽利略年輕時發明十倍率的的望遠鏡，並於次年發現木星的歐羅巴衛星，發明望遠鏡到出版《對話錄》算是伽利略人生中的黃金歲月，這段時間之長剛好是他發現衛星時年紀的一半。根據上面的敘述，請問下列有關伽利略生平的敘述，哪些是正確的?

(A)出生於西元 1566 年　　(B)在 45 歲時發明 10 倍率的望遠鏡
(C)在西元 1610 年發現歐羅巴衛星　(D)在 68 歲時出版《對話錄》
(E)於西元 1644 年過世　[90 社]

Ans:: (B)(C)(D)

EX.2

試判斷下列各命題的對或錯，並說明其理由。

x 是實數，若 $x=2$，則 $x^2=4$。

x 是實數，若 $x^2-x=0$，則 $x=1$。

若ΔABC 為等腰三角形，則∠B=∠C。

若∠A 為鈍角，則ΔABC 為鈍角三角形。

直角三角形中，恰有一個角為 90°。

a, b 是正實數，若 $a=b$，則 $a^2\le b^2$。

a, b 是實數，若 $a>3$ 且 $b>3$，則 $a+b>5$。

a, b 是實數，若 $a<4$ 或 $b<5$，則 $a+b<9$ a。

過ΔABC 之重心的直線，必為ΔABC 之一中線。

a, b 是實數，若 $ab=0$，則 $a=0$ a= 0 且 $b=0$。

Ans. 對。因 $x=2$ 時， $x^2=2\cdot 2=4$。

錯。因 $x^2-x=x(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ 或 $x=1$，此時並非 $x=1$ 不可。

錯。因等腰三角時，有可能是 $\angle A=\angle B$ 或 $\angle A=\angle C$。

對。因鈍角三角形中，僅有一個鈍角。

對。這是一個明顯的事實。

對。因 $a,\ b$ 均為正實數，$a=b \ \Rightarrow\ a^2=b^2$，而 $a^2\le b^2$ 表 $a^2=b^2$ 或 $a^2<b^2$，只要其一即可。

對。因 $a>3$，$b>3 \quad \Rightarrow\ a+b>3+3=6>5$。

錯。因 $a<4$ a　4 或 $b<5$ 時，只要有一個成立即可。此時，若 $a=3$，$b=10$，則 $a+b=13$ 就不會小於 9。

錯。因過重心的任一直線並不一定要通過三頂點之一，故不一定為中線。

錯。因 $ab=0 \ \Rightarrow\ a=0$ 或 $b=0$，並不需要 $a,\ b$ 二者均為 0。

1.2 集合

■ 集合簡介

集合：集合是由一些明確而可鑑定的東西所組成的群體。

元素：組成集合的每一個要素。

若 a 是集合 S 的一個元素，可記為 $a \in S$。

若 a 不是集合 S 的一個元素，可記為 $a \notin S$。

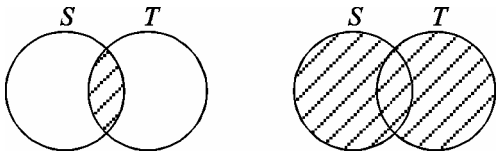
子集：若集合 S 的每一個元素都是集合 T 的元素，則稱 S 為 T 的

一個子集，記為 $S \subset T$ 或 $T \supset S$。

空集合 ϕ：不含元素的集合。

補集（餘集）：A' $A'=U-A$ $\{x \mid x \notin A\}$（U 為宇集）。

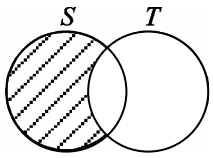
■ 集合的運算



$S \cap T$ $\{x \mid x \in S$ 且 $x \in T\}$。

$S \cup T$ $\{x \mid x \in S$ 或 $x \in T\}$。

$S \setminus T$ $\{x \mid x \in S$ 但 $x \notin T\}$。



■ 笛摩根定律

$(A \cup B)' = A' \cap B'$。

$(A \cap B)' = A' \cup B'$。

EX1

試求下列各組集合 A, B 的交集 $A \cap B$ 與聯集 $A \cup B$。

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$。

$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3\}$。

$A = [-2, 3)$，$B = (1, 5]$。

$A = \{x \mid x$ 為整數，x 為 2 的倍數$\}$，$B = \{x \mid x$ 為整數，x 為 3 的倍數$\}$。

$A = \{x \mid x^2 - 3x \quad 2 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - 5x \quad 6 = 0\}$。

Ans: $A \cap B \quad \{1, 3, 5\}$，$A \cup B \quad \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$。

$A \cap B \quad \phi$，$A \cup B \quad \{a, b, c, 1, 2, 3\}$。

$A \cap B \quad (1, 3)$，$A \cup B \quad [\ 2, 5]$。

$A \cap B \quad \{x \mid x$ 為整數，x 為 6 的倍數$\}$，

$A \cup B \quad \{x \mid x$ 為整數，x 為 2 或 3 的倍數$\}$。

$\{\cdots, \quad 6, \quad 4, \quad 3, \quad 2, 0, 2, 3, 4, 6, \cdots\}$

$x^2 - 3x \quad 2 \quad (x - 1)(x - 2) \quad 0 \Rightarrow x \quad 1, 2 \quad \therefore A \quad \{1, 2\}$，

$x^2 - 5x \quad 6 \quad (x - 2)(x - 3) \quad 0 \Rightarrow x \quad 2, 3 \quad \therefore B \quad \{2, 3\}$，

故 $A \cap B \quad \{2\}$，$A \cup B \quad \{1, 2, 3\}$。

EX2

. 設 a、b 為二實數，二集合 $A = \{(x, y) \mid ax - 2 = 8\}$，$B = \{(x, y) \mid x = by = 5\}$，若 $A \cap B = \{(2,1)\}$，則數對$(a, b) =$_____。

Ans：將 x=2、y=1 代入 A、B 二式可得 (5, 3)

1.3 因數與倍數

■ 因數與倍數

1. 定義: 設$a,b\in Z$，若存在一整數q，使得$a=bq$，則稱b為a的因數，而 a 為b的倍數，以$b \mid a$表示。

性質：(1)$a,b,c\in Z$，若$a \mid b$且$b \mid c$，則 $a \mid c$

(2)$a,b,c\in Z$，若$a \mid b$且$b \mid c$，則對任意的$m,n\in Z$，$a \mid bm+cn$。

2. 倍數的判定： 設n為正整數

(1) n為 3(9)的倍數$\Leftrightarrow$ n的個位數字為 3(9)的倍數。

(2) n為 5 的倍數$\Leftrightarrow$ n的個位數字為 0 或 5。

(3) n為 11 的倍數$\Leftrightarrow$ n的奇數位與偶數位的各數字和其差為 11 的倍數。

3. 質數的判定法則：

設n為大於 1 的正整數，若所有不大於$\sqrt{n}$的質數均不為n的因數，則n為質數

n為質數，若$n=$ p × q，(p, q 為正整數) 則 p,q 必有一數為 1

4. 最大公因數與最小公倍數:

$(1).a,b\in N,$若$(a,b)=d,a=dh,b=dk,[a,b]=dhk.\Rightarrow(a,b)\times[a,b]=ab.$

$(2).a,b,q,r\in Z,$若$a=bq+r,$則$(a,b)=(b,r).$或$(a,q)=(q,r)$

EX1.

設 a, b 都是三位正整數，若 $(a,b)=36$，$[a,b]=540$，求 a, b 之值。設 a, b 為正整數，若 $a-b=30$，且 $[a,b]=225$，求 a, b 之值。

Hint：設 $(a,b)=d$ 且 $a=hd$，$b=kd$，則 $(h,k)=1$，且 $[a,b]=dhk$，此性質是處理最大公因數與最小公倍數相關問題的有效方法。

Ans： $\because (a,b)=36 \quad \therefore a=36h$，$b=36k$，其中 $(h,k)=1$

$\because [a,b]=540$ 且 $[a,b]=36hk \quad \therefore 36hk=540 \quad \Rightarrow \quad hk=15$

$\because (h,k)=1 \quad \therefore$

h	1	15	3	5
k	15	1	5	3

$\Rightarrow$

a	36	540	108	180
b	540	36	180	108

$\because a$, b 為三位數 $\quad \therefore \begin{cases} h=3 \\ k=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} h=5 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=108 \\ b=180 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=180 \\ b=108 \end{cases}$。

令 $(a,\ b)\quad d$ 且 $a\quad hd$，$b\quad kd$，則 $(h,\ k)\quad 1 \Rightarrow (h-k,\ hk)\quad 1$

$\because a-b\quad 30 \quad \therefore hd-kd\quad 30 \Rightarrow (h-k)d\quad 30$

$\because [a,\ b]\quad 225 \quad \therefore hkd\quad 225 \quad \because (h-k,\ hk)\quad 1 \quad \therefore d\quad (30,\ 225)\quad 15$

$\Rightarrow \begin{cases} h-k=2 \\ hk=15 \end{cases} \quad \because (h,\ k)=1 \quad \therefore h=5$，$k=3$，故 $a=75$，$b=45$。

.EX2.

設 $a=504$，試求：

a 之標準分解式。　　a 之質因數個數。　　a 之正因數個數。

a 之正因數之總和。　　a 之正因數為完全平方者有幾個？

a 之正因數中為 3 的倍數者有幾個？

Ans:

$a=2^3\cdot 3^2\cdot 7$。

a 之質因數有 2, 3, 7 共 3 個。

a 之正因數個數為 $(3+1)(2+1)(1+1)=24$。

a 之正因數之總和為 $(2^0+2^1+2^2+2^3)\cdot(3^0+3^1+3^2)\cdot(7^0+7^1)=\dfrac{2^4-1}{2-1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3-1}\cdot\dfrac{7^2-1}{7-1}$

$= 15\times 13\times 8 = 1560$。

$\because a=2^3\cdot 3^2\cdot 7=2^2\cdot 2\cdot 7$，且 a 之正因數中為完全平方者就是 $(2^2)^1\cdot(3^2)^1$ 的正因數。

$\therefore (2^2)^1\cdot(3^2)^1$ 之正因數有 $(1+1)(1+1)=4$ 個。

$a=2^3\cdot 3^2\cdot 7=3(2^3\cdot 3\cdot 7)$ 有正因數 $3p \quad \therefore p$ 為 $2^3\cdot 3\cdot 7$ 之正因數

而 $2^3\cdot 3\cdot 7$ 之正因數 p 有 $(3+1)(1+1)(1+1)=16$ 個

$\therefore a$ 之正因數中為 3 之倍數者有 16 個。

1.4 無理數與實數

■ 無理數

(1)定義：設a, b為整數，$b \neq 0$，數可表為$\frac{a}{b}$者稱為有理數，其集合以Q表之。

EX. $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{5}$、$7 = \frac{7}{1}$----有理數

(2)封閉性：a，$b \in Q$，$b \neq 0$，則$a \pm b$，$a \times b$，$\frac{a}{b} \in Q$。

(3)定義：有理數與無理數所成的數系稱為實數系，以R表之。

(4)絕對值：(a)設$a \in R$，$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a \leq 0 \end{cases}$。

(b)設$a \in R$，$\sqrt{a^2} = |a|$。

(c)設a，$b \in R$，$|a| + |b| \geq |a+b|$，$|a| - |b| \leq |a-b|$ 。

■ 實數

(1)定義：有理數與無理數所成的數系稱為實數系，以R表之。

(2)絕對值：(a)設$a \in R$，$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a \leq 0 \end{cases}$。

(b)設$a \in R$，$\sqrt{a^2} = |a|$。

(c)設a，$b \in R$，$|a| + |b| \geq |a+b|$，$|a| - |b| \leq |a-b|$ 。

1.5 複數

■ 複數

(1) 定義：設 $a,b\in R$，形如: $a+bi$ 的數，稱為複數，其中
a 稱為實部，b 稱為虛部。

(2) 複數相等：$a,b,c,d\in R$，若 $a+bi=c+di$，則 $a=c$，$b=d$。

■ 共軛複數與複數的絕對值

(1) 定義：設 $a,b\in R$，$Z=a+bi$，則 $\overline{Z}=a-bi$ 為 Z 之共軛複數。

$i^2=1$；$i^3=-1$；$i^4=1$

(2) 性質：設 Z_1,Z_2 為複數，則

(a) $\overline{Z_1\pm Z_2}=\overline{Z_1}\pm\overline{Z_2}$　(b) $\overline{Z_1\cdot Z_2}=\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2}$　(c) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}(Z_2\neq 0)$

(d) $|Z|^2=Z\cdot\overline{Z}$　(e) $|Z^n|=|Z|^n$

■ 一元二次方程式的根

$a,b,c\in R$，方程式 $ax^2+bx+c=0$，二根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(1) 根的性質：(a) 若 $b^2-4ac>0$，則方程式為二相異實根。
(b) 若 $b^2-4ac=0$，則方程式為二相等實根。
(c) 若 $b^2-4ac<0$，則方程式為二共軛虛根。

(2) 根與係數關係：設二根為 α，β 則 $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。

EX1.

令ω $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求ω^2，ω^3，$1+\omega+\omega^2$，$\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}\cdots+\omega^{100}$。

Ans: $\omega^2=(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2})^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$。

$\omega^3=\omega\cdot\omega^2=1$。

$1+\omega+\omega^2=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=0$。

原式$=\dfrac{\omega^{101}-\omega^{10}}{\omega-1}=\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。

EX2.

設α, β為方程式$x^2+3x-4=0$的兩根，求

α^2，β^2，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\alpha^3+\beta^3$，$\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$，$\dfrac{\alpha}{\beta+1}+\dfrac{\beta}{\alpha+1}$。

Ans:$\alpha+\beta=3$，$\alpha\cdot\beta=-4$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\cdot(-4)=9+8=17$。

$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{-17}{4}$。

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-63$。

$\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}=\dfrac{63}{64}$。

$\dfrac{\alpha}{\beta+1}+\dfrac{\beta}{\alpha+1}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{(\beta+1)(\alpha+1)}=-\dfrac{7}{3}$。