二、　指數對數

2.1 指數與對數基本概念　2

指數的定義　2

2.2 指數運算　2

指數的運算性質　2

指數函數的定義　3

指數函數的基本性質　3

指數函數圖形的性質　3

對數的定義　5

2.3 對數運算　5

對數的性質　5

對數函數的定義　6

指對數不等式*　6

二、　指數對數

2.1 指數與對數基本概念

■ 指數的定義

1. 設 a 為實數、n 為正整數，a 自乘 n 次之積以 a^n 表示，即 $a\times a\times a\times\cdots\times a=a^n$ 。
指數的基本形式：

$$a^{n}$$

n —— 指數

a —— 底數

2. 零指數：設 $a\in R$ 、$a\neq 0$ ，規定 $a^0=1$

3. 負整數指數：設 $a\in R$ 、$a\neq 0$ 、$n\in N$ ，則 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

4. 分數指數：設 $a\in R$ 、$a\neq 0$ 、$m,n\in N$ ，則 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

2.2 指數運算

■ 指數的運算性質

設 $a>0$ 、$b>0$ ，且 $m,n\in R$

1. $a^m\times a^n=a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n=a^{m\times n}$
3. $(ab)^n=a^n\times b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
6. $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$
7. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$
8. $a^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$
9. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$
10. $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

■ 指數函數的定義

設$a>0$，$a\neq 1$，x是任意實數，稱$f(x)=a^x$為以a為底數的指數函數。

■ 指數函數的基本性質

1. 對任意實數x，$f(x)=a^x>0$恆成立。

2. 對任意實數x_1、x_2，恆有$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

3. $f(x)=a^x$為遞增、遞減的條件：

(1)$a>1$時，$x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$(嚴格遞增)

(2)$0<a<1$時，$x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$(嚴格遞減)

■ 指數函數圖形的性質

1. $y=a^x$的圖形恆在X軸上方，即$a^x>0$對一切實數x恆成立

2. $y=a^x$的圖形(不管底數a的大小)恆與Y軸交於點(0，1)

3. $y=a^x$的圖形是連續的(沒有任何段點)

4. 當$a>1$，如圖 2.1，$y=a^x$圖形由左往右逐漸上升；當$0<a<1$，$y=a^x$圖形由左往右逐漸下降

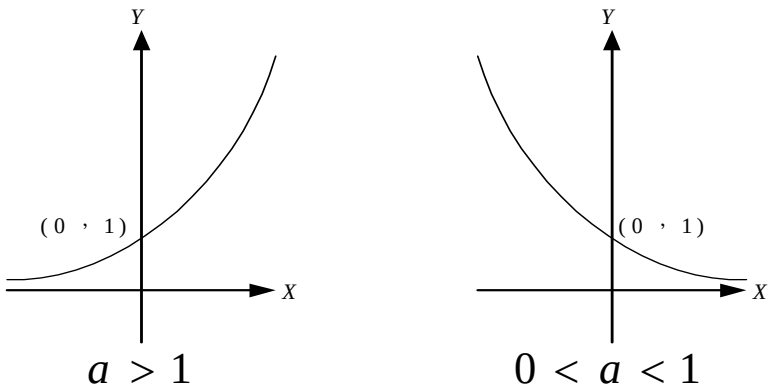


圖 2.1 當$a>1$(左)與 $0<a<1$(右)之圖形

5. $y=a^x$的圖形與$y=(\frac{1}{a})^x$的圖形恆對偶於Y軸

6. X軸是$y=a^x$圖形的漸進線

EX1.

化簡下列各式：

$(2^{-2})^{-4}+(20^{-3})^{\frac{2}{3}}+(64^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{3}}$　　$(1000^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{1}{9}}\div 5^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{3}{4}}$　　$(2-\sqrt{3})^{12}(2+\sqrt{3})^{10}$

Ans:原式　$256+\dfrac{1}{400}+16=272\dfrac{1}{400}$。

原式　$10^{\frac{1}{4}}\div 5^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{4}}\div 5^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{3}{4}}=2$。

原式　$(2-\sqrt{3})^2[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{10}=7-4\sqrt{3}$。

EX2.

設$(11.5)^a=(0.0115)^b=1000$，則$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=$？

設 53^x　9，477^y　243，求$\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}$　？

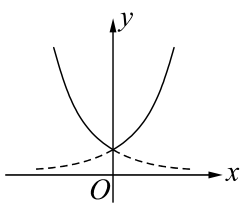
Ans: $11.5=10^{\frac{3}{a}}$，$0.0115=10^{\frac{3}{b}}$　$\therefore 10^{\frac{3}{a}-\frac{3}{b}}=1000$，$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=1$。

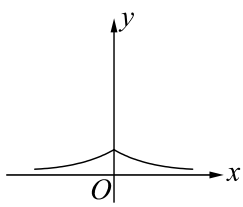
$53=3^{\frac{2}{x}}$，$477=3^{\frac{5}{y}}$，$3^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}=\dfrac{1}{9}$　$\therefore \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=2$。

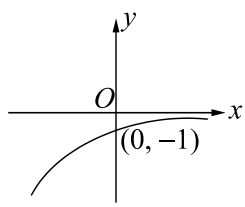
EX3.

作下列各函數圖形：　$y=2^{|x|}$，$y=(\dfrac{1}{2})^{|x|}$，$y=x^2$。

Ans:







■ 對數的定義

若 $a>0$ 且 $a\neq 1$；而 b 為正數，且實數滿足 $a^x=b$，則 x 稱為以 a 為底數，b 的對數，記做 $\log_a b$，亦即 $x=\log_a b$

$$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$$

真數

底數

2.3 對數運算

■ 對數的性質

1. 指數的性質：$a^0=1$ $\Rightarrow$ 對數的性質：$\log_a 1=0$

   指數的性質：$a^1=a$ $\Rightarrow$ 對數的性質：$\log_a a=1$

2. $\log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N$

3. $\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$

4. $\log_a M^r=r\log_a M$

5. $\log_a M=\frac{\log_c M}{\log_c a}$（換底公式）

6. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

7. $a^{\log_a M}=M$

8. $\log_a \frac{1}{N}=-\log_a N$

9. $\log_{a^r} M=\frac{1}{r}\log_a M$

10. $\log_{a^r} M^s=\frac{s}{r}\log_a M$

■ 對數函數的定義

設 a 是異於 1 的正數，對於任意實數 $x>0$，稱 $f(x)=\log_a x$ 為以 a 為底數的對數函數

■ 指對數不等式*

1. 若 $a>1$ 且 $x>y$，則 $a^x>a^y \Rightarrow x>y>0$，$\log_a x>\log_a y$

2. 若 $0<a<1$ 且 $x>y$，則 $a^x<a^y \Rightarrow x>y>0$，$\log_a x<\log_a y$

EX1.

若 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，試以 a、b 表示 $\log_{63} 84=$？

Ans:

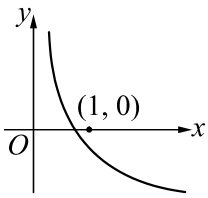
$$\log_{63} 84=\frac{\log_2 84}{\log_2 63}=\frac{2+\log_2 3+\log_2 7}{\log_2 7+2\log_2 3}=\frac{ab+a+2}{ab+2a}$$

（$\because (\log_2 3)(\log_3 7)=ab=\log_2 7$）

EX2.

下圖為函數 $y=a+\log_b x$ 之部份圖形，其中 a、b 為常數，

則下列何者為真？



(A) $a<0$，$b>1$　(B) $a>0$，$b>1$　(C) $a=0$，$b>1$

(D) $a>0$，$0<b<1$　(E) $a<0$，$0<b<1$。

Ans: $a<0$，$0<b<1$，選(E)。