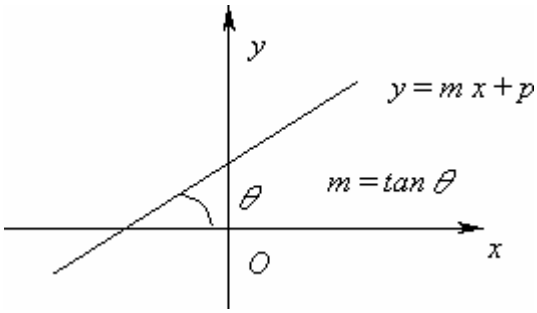
五、　幾何.....
5.1 直線方程.....2
直線與斜率.....2
點斜式.....2
5.2 拋物線.....3
5.3 圓與橢圓.....6
圓.....6
橢圓.....7

五、　幾何

5.1 直線方程

■　直線與斜率

設點 x、y 為滿足方程式 $y=mx+p$ 上之兩點，m 、p 是給定的常數，其中 p 為該直線截 y 軸（即 x=0 時）於 p ，而 m 表示該直線的斜率，即直線與 x 軸相交時的傾斜度，若直線 x 軸的交角為 θ 時，則 $m=\tan\theta$ 。

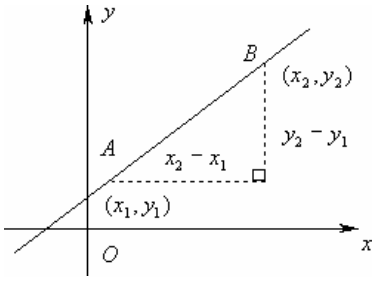


吾人可將一般之二元一次方程式：$ax+by+c=0$，若 $b\neq 0$，可改寫為 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ ，則 $m=-a/b$ ， $p=-c/a$ 分別為該直線之斜率 m 及與 y 軸的截距。

若 $b=0$，則該直線為 $ax+c=0$，$x=-c/a$ 這條直線是截 x 軸於點$(-c/a\,,0)$且與　y 軸垂直的直線。

■　點斜式

當吾人已知一直線斜率為 m ，且通過某一點 (x_1,y_1) ，則該直線方程式可表示為 $y-y_1=m(x-x_1)$ 。



1.過兩點直線方程式　：　$y-y_1=\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x-x_1)$

設通過 A、B 兩點之直線方程式為 $y=mx+p$

其中 A、B 兩點斜率 $m=\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ ， $p=\dfrac{y_2y_1-x_2y_1}{x_2-x_1}$

故 $y-y_1=\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x-x_1)$，其中斜率 $m=\tan\theta=\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$

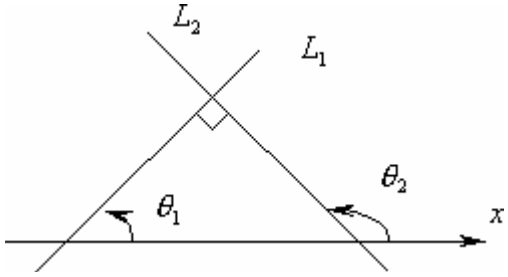
2. 平面上兩直線關係

兩直線 $\begin{matrix} L_1: y = m_1 x + p_1 \\ L_2: y = m_2 x + p_2 \end{matrix}$ ，若斜率相等，即 $m_1 = m_2$ ，則為平行。

若 $m_1 = m_2$ 且 $p_1 = p_2$ ，則兩直線重合。

若兩直線垂直，其傾斜角分別設為 θ_1 、θ_2 時，則 $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$

$$m_2 = \tan\theta_2 = \tan(\theta_1 + 90^\circ)$$
$$= -\cot\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_1}$$
$$= \frac{1}{m_1}$$



兩直線： $y = m_1 x + p_1$ 及 $y = m_2 x + p_2$ ，

平行： $m_1 = m_2$

直線： $m_1 \cdot m_2 = -1$

EX1. 求下列條件所決定的直線方程式：

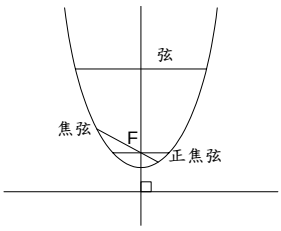
(1) 過 $\tilde{A}(2, 3)$且斜率為 2，(2) 過 $A(4, 3)$，$\tilde{B}(4, 1)$，(3) 過$(3, 0)$，$(0, \tilde{2})$，(4) 斜率為 $-\frac{1}{3}$ ，y 截距為 6

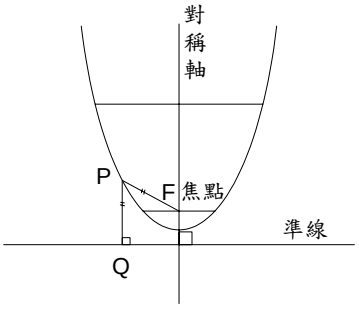
Ans: (1) $y - 3 = 2(x+2) \Rightarrow y = 2x + 7$ y − 3 。(2) $\frac{3-1}{4-(-4)} = \frac{y-3}{x-4} \Rightarrow x - 4y + 8 = 0$ 。

(3) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0$ 。(4) $(y\text{-}6) = (\text{-}1/3)x$ => $x + 3y$ -18 = 0

5.2 拋物線

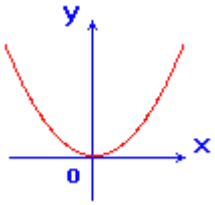
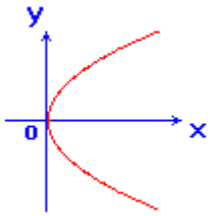
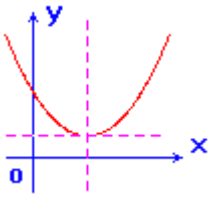
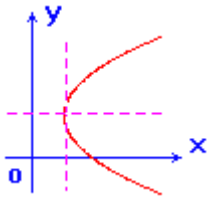
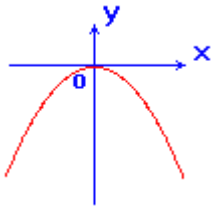
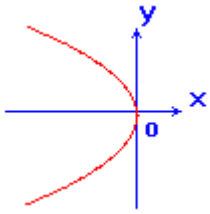
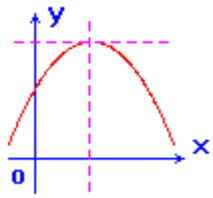
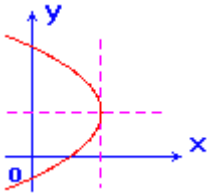
拋物線是平面內到一定點和到一條不過此點的定直線的距離相等的點的軌跡。這一定點叫做拋物線的焦點，定直線叫做拋物線的準線。





對稱軸：拋物線是軸對稱圖形，它的對稱軸簡稱軸。
頂點：拋物線與它的軸的交點叫做拋物線的頂點。
弦：拋物線的弦是連接拋物線上任意兩點的線段。
焦弦：拋物線的焦弦是經過拋物線焦點的弦。
正焦弦：拋物線的正焦弦是垂直於軸的焦弦。

拋物線表示法：

示意圖	 c > 0	 c > 0	 c > 0	 c > 0
	 c < 0	 c < 0	 c < 0	 c < 0
拋物線方程式	$x^2 = 4cy$	$y^2 = 4cx$	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	$(y-k)^2 = 4c(x-h)$
頂 點	(0, 0)	(0, 0)	(h, k)	(h, k)
焦 點	(c, 0)	(c, 0)	(h, k + c)	(h + c, k)
準 線方程式	y = - c	x = - c	y = - c + k	x = - c + h
正焦弦長	4 | c |	4 | c |	4 | c |	4 | c |

EX.1 求拋物線 $x^2-8x+3y+10=0$ 的(1)對稱軸(2)頂點(3)焦點(4)準線(5)正焦弦長

Sol: $x^2-8x+3y+10=0 \Rightarrow x^2-8x+16+3y-6=0$

$\Rightarrow (x-4)^2 = 4(-\frac{3}{4})(y-2)$

對稱軸：$x=4 \Rightarrow x-4=0$

頂點：$(x-4)^2=4(-\frac{3}{4})(y-2) \Rightarrow (4,2)$

焦點：$(4,2+(-\frac{3}{4}))=(4,\frac{5}{4})$

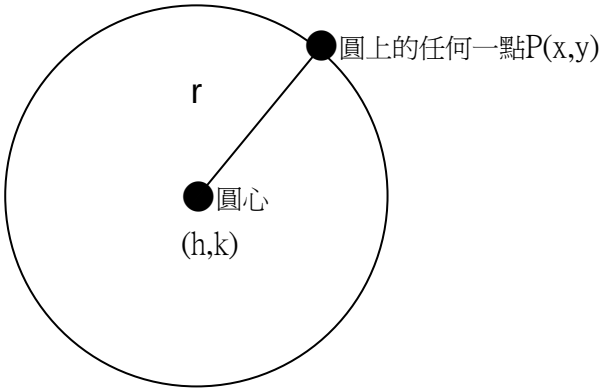
準線：$y=2-(-\frac{3}{4})=\frac{11}{4} \Rightarrow y-\frac{11}{4}=0$

正焦弦長：$4\cdot\left|-\frac{3}{4}\right|=3$

5.3 圓與橢圓

■ 圓

1.定義：在同一平面上與一定點等距離之所有點所成之集合稱為圓



圓上任一點 $P(x,y)$ 與一定點圓心 (h,k) 的距離 d 為半徑 r

即 $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$

標準式：$(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2+(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2=\mathrm{r}^2$

一般式：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

又或寫作 $(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=(\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2})^2$

(1)當 $D^2+E^2-4F>0$，表一圓，即圓心為 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$，半徑為 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

(2)當 $D^2+E^2-4F=0$，表一點，即 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$

(3).當 $D^2+E^2-4F<0$，圖形不存在

以標準式判斷平面上一點 P(x0, y0)與圓的相關位置如下：

(1).若 P 在圓內 $(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2+(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2<\mathrm{r}^2$

(2)若 P 在圓上 $(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2+(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2=\mathrm{r}^2$

(3)若 P 在圓外 $(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2+(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2>\mathrm{r}^2$

EX1.將下列方程式化為$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，並說明幾何意義？

(1) $x^2+y^2-2x+4y-31=0$

(2) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

(3) $x^2+y^2-2x+4y+8=0$

Sol:

一般式：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

應用$D^2+E^2-4F=0$判別式來判別圖形為何，並可得:

$x^2+y^2-2x+4y-31=0 \Rightarrow (-2)^2+4^2-4(-31)>0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=6^2 \Rightarrow$ 圓心為 $(1,-2)$，半徑為6

$x^2+y^2-2x+4y+5=0 \Rightarrow (-2)^2+4^2-4(5)=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=0 \Rightarrow$ 點$(1,-2)$

$x^2+y^2-2x+4y+8=0 \Rightarrow (-2)^2+4^2-4(8)<0 \Rightarrow$ 無圖形

■ 橢圓

1.橢圓的定義：

定義：在平面上與二定點F_1,F_2距離和，恒為一定數$2a$，($2a>\overline{F_1F_2}$)之所有點所成之集合稱為橢圓，即$\{P \mid \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a, 2a>\overline{F_1F_2}$，其中$F_1,F_2$為兩定點 $\}$ 。

(1) F_1，F_2稱為焦點，$\overline{F_1F_2}=2C$。

(2) $2a$稱為長軸，$2b$稱為　短　軸

(3) 正焦弦長為$\dfrac{2b^2}{a}$，面積為$ab\pi$。

(4) 焦半徑：$\overline{PE}_1=a-\dfrac{cx}{a}$，$\overline{PE}_2=a+\dfrac{cx}{a}$。

2. 橢圓的標準式：

(1) 橢圓長軸平行 x 軸：

設中心(h, k)，中心到焦點距離為 c，半長軸長 a，半短軸長 b，$a^2=b^2+c^2$，

則橢圓方程式為$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$。

(2) 橢圓長軸平行 y 軸：

設中心(0,0)，中心到焦點距離為 c，半長軸長為 a，半短軸長為 b，$a^2=b^2+c^2$，則橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$。

橢圓參數式：

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, a>b>0 \text{之參數式為} \begin{cases} x=h+a\cos\theta \\ y=k+b\sin\theta \end{cases}, 0\le\theta\le 2\pi$$

EX1. $x^2+9y^2+8x+54y+61=0$ 的(1)中心座標(2)交點座標(3)頂點座標(4)長軸長(5)短軸長(6)正焦弦長

Sol:

$$x^2+9y^2+8x+54y+61=0 \Rightarrow \frac{(x-(-4))^2}{6^2}+\frac{(y-(-3)^2)}{2^2}=1$$

(1) $(-4,-3)$

(2) $(-4+4\sqrt{2},-3)$ ，$(-4-4\sqrt{2},-3)$

(3) $(-4+6,-3)=(2,-3)$ ，$(-4-6,-3)=(-10,-3)$

(4) $6\times 2=12$

(5) $2\times 2=4$

(6) $\frac{2\cdot 2^2}{6}=\frac{4}{3}$