

Best-Wise

# Chapter 7

## 連續機率分配

7.1 已知  $Z$  為標準常態隨機變數，計算下列機率值：

a.  $P(0 \leq Z \leq 1.83)$

b.  $P(-1.24 \leq Z \leq 0)$

c.  $P(Z \geq 1.35)$

d.  $P(Z \geq -1.76)$

e.  $P(Z < 1.22)$

f.  $P(Z \leq -2.45)$

解

a. :  $P(0 \leq Z \leq 1.83) = 0.4664$

b. :  $P(-1.24 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1.24) = \int_0^{1.24} \times e^{-\frac{z^2}{2}} = 0.3925$

c. :  $P(Z \geq 1.35) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.35) = 0.0885$

d. :  $P(Z \geq -1.76) = 0.5 + P(-1.76 \leq Z \leq 0) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.76) = 0.9608$

e. :  $P(Z < 1.22) = 0.5 + P(0 \leq Z < 1.22) = 0.8888$

f. :  $P(Z \leq -2.45) = P(Z \geq 2.45) = 0.5 - P(0 \leq Z < 2.45) = 0.0071$

7.2 已知  $Z$  為標準常態隨機變數，求各面積下的  $z$  值。

- a. 落於 0 與  $z$  值之間的面積為 0.4750。
- b. 落於 0 與  $z$  值之間的面積為 0.2291。
- c.  $z$  值的右邊面積為 0.1314。
- d.  $z$  值的左邊面積為 0.6700。

解

$$a. : P(0 \leq Z \leq z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{z^2}{2}} = 0.4750 \Rightarrow z = 1.96$$

$$P(z \leq Z \leq 0) = \int_z^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{z^2}{2}} = 0.4750 \Rightarrow z = -1.96$$

$$z = 1.96 \text{ 或 } -1.96$$

$$b. : P(0 \leq Z \leq z) = 0.2291 \Rightarrow z = 0.61$$

$$P(z \leq Z \leq 0) = 0.2291 \Rightarrow z = -0.61$$

$$z = 0.61 \text{ 或 } -0.61$$

$$c. : P(Z \geq z) = 0.1314 = 0.5 - P(0 \leq Z \leq z) \Rightarrow z = 1.12$$

$$d. : P(Z \leq z) = 0.6700 = 0.5 + 0.1700 = 0.5 + P(0 \leq Z \leq z) \Rightarrow z = 0.44$$

7.3 已知  $Z$  為標準常態隨機變數，求下列各情況下的  $z$  值。

- a.  $z$  值的右邊面積為 0.01。
- b.  $z$  值的右邊面積為 0.025。
- c.  $z$  值的右邊面積為 0.05。
- d.  $z$  值的右邊面積為 0.10。

解  $a. : P(Z \geq z) = 0.01 = 0.5 - P(0 \leq Z < z)$

$$P(0 \leq Z < z) = 0.49 \quad z = 2.33$$

$b. : P(Z \geq z) = 0.025 = 0.5 - P(0 \leq Z < z)$

$$P(0 \leq Z < z) = 0.475, \quad z = 1.96$$

$c. : P(Z \geq z) = 0.05 = 0.5 - P(0 \leq Z < z)$

$$P(0 \leq Z < z) = 0.45, \quad z = 1.645$$

$d. : P(Z \geq z) = 0.10 = 0.5 - P(0 \leq Z < z)$

$$P(0 \leq Z < z) = 0.4, \quad z = 1.28$$

7.4. 管理學院的統計學課程其期末考試學生完成時間呈常態分配，平均數為 80 分鐘，標準差為 10 分鐘，試問

- 在一個小時內完成考試的機率是多少？
- 學生會在 60 分鐘到 75 分鐘完成考試的機率是多少？
- 假設共有 60 位學生，而考試時間為 100 分鐘，則有多少學生不能在此時間內完成考試？

解  $X : \text{學生完成時間 (分鐘)}$

$$a. : P(X \leq 60) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{60 - 80}{10}\right) = P(Z \leq -2) = 0.0228$$

$b. :$

$$P(60 \leq X \leq 75) = P\left(\frac{60-80}{10} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{75-80}{10}\right) = P(-2 \leq Z \leq -0.5)$$

$$= 0.3080 - 0.0228 = 0.2852$$

$$e. : P(X > 100) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{100-80}{10}\right) = P(Z > 2) = 0.0228$$

$$60 \times 0.0228 = 1.368$$

∴ 約 2 位同學

7.5 失業率調查為 6%，現隨機抽取 100 位具就業能力的人，試問

- a. 失業的期望人數是多少人？
- b. 失業人數的變異數與標準差是多少？
- c. 剛好有 9 位失業的機率是多少？
- d. 至少有 5 位失業的機率是多少？

解

$$a. : E(X) = n \times P = 100 \times 0.06 = 6 \text{ (人)}$$

$$b. : V(X) = n \times P(1 - P) = 100 \times 0.06 \times 0.94 = 5.64$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5.64} \approx 2.37$$

c. :

$$P(X = 9) \approx P(9 - 0.5 \leq X \leq 9 + 0.5) = P\left(\frac{8.5-6}{2.37} \leq Z \leq \frac{9.5-6}{2.37}\right)$$

$$= P(1.05 \leq Z \leq 1.48)$$

$$= 0.0775$$

$$d. : P(X \geq 5) \approx P(Y \geq 5 - 0.5) = P(Z \geq \frac{4.5 - 6}{2.37}) = P(Z \geq -0.6) = 0.7357$$

7.6. 某休閒旅館共有 120 個房間，其春季有接近 75% 的住屋率，請利用常態分配估算二項機率的方式來回答下列問題。

- 在某一天該旅館至少有一半的房間有人住的機率是多少？
- 在某一天該旅館有 100 間以上的房間有人住的機率是多少？
- 在某一天該旅館有少於 80 間房間有人住的機率是多少？

解

$$n = 120, n \times P = 120 \times 0.75 = 90$$

$$n \times P \times (1 - P) = 90 \times 0.25 = 22.5$$

$$a. : P(X \geq 60) \approx P(Y \geq 60 - 0.5) = P(Z \geq \frac{55.5 - 90}{\sqrt{22.5}}) = P(Z \geq -7.27) = 100\%$$

$$b. : P(X \geq 100) \approx P(Y \geq 100 - 0.5) = P(Z \geq \frac{99.5 - 90}{\sqrt{22.5}}) = P(Z \geq 2) = 0.0228$$

$$c. : P(X < 80) \approx P(Y < 80 - 0.5) = P(Z < \frac{79.5 - 90}{\sqrt{22.5}}) = P(Z < -2.21) = 0.0136$$

7.7. 某運動場參觀棒球賽的人數呈常態分配，平均數 10000 人，標準差 2000 人。

- 觀眾人數介於 4000 到 8000 人的機率是多少？
- 觀眾人數超過 15000 人的機率是多少？

解

a. :

$$P(4000 \leq X \leq 8000) = P\left(\frac{4000 - 10000}{2000} \leq Z \leq \frac{8000 - 10000}{2000}\right)$$

$$= P(-3 \leq Z \leq -1) = 0.1573$$

$$b. : P(X > 15000) = P\left(Z > \frac{15000 - 10000}{2000}\right) = P(Z > 2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

- 7.8. 某項針對企管系畢業生薪資的調查顯示，一個有 6 到 9 年經驗的業務部門主管平均薪資為 47,000 元，假設薪資呈常態分配，且標準差為 5,500 元。試問
- 一個主管薪資在 40,000 元到 50,000 元之間的機率是多少？
  - 一個主管薪資少於 35,000 元的機率是多少？
  - 一個主管薪資超過 55,000 元的機率是多少？這些有 6 到 9 年經驗的主管中，前 1% 的高所得者薪資是多少？

解

a. :

$$\begin{aligned} P(40,000 \leq X \leq 50,000) &= P\left(\frac{40,000 - 47,000}{5,500} \leq Z \leq \frac{50,000 - 47,000}{5,500}\right) \\ &= P(-1.27 \leq Z \leq 0.545) = 0.3980 + 0.2071 = 0.6051 \end{aligned}$$

b. :

$$\begin{aligned} P(X < 35,000) &= P\left(Z < \frac{35,000 - 47,000}{5,500}\right) \\ &= P(Z < -2.18) \\ &= 0.5 - 0.4854 \\ &= 0.0146 \end{aligned}$$

c. :

$$P(X > 55,000) = P\left(Z > \frac{55,000 - 47,000}{5,500}\right)$$

$$= P(Z > 1.45)$$

$$= 0.5 - 0.4265$$

$$= 0.0735$$

$$P\left(Z > \frac{X - 47,000}{5,500}\right) = 0.01$$

$$\frac{X - 47,000}{5,500} = 2.33 \quad X = 59,815$$

7.9. 現有 50 題選擇題，每題有 4 種選擇，假設某學生在做了家庭作業後，有 80% 的可能可以答對任何問題。試問

- 若要答對 43 題以上才能得到 A，則該學生有多少可能可以得到 A？
- 若答對 35 到 39 題才能得到 C，則該學生有多少可能會得 C？
- 若要答對 30 題以上才能及格，則該學生有多少可能會及格？
- 若該學生沒做家庭作業，考試時也只用猜的，則可以猜對 30 題以上的機率是多少？

解

$$n = 50, \quad n \times P = 50 \times 0.8 = 40, \quad n \times P(1 - P) = 8$$

$$a. : P(X \geq 43) \approx P(Y \geq 43 - 0.5) = P\left(Z \geq \frac{42.5 - 40}{\sqrt{8}}\right) = P(Z \geq 0.88) = 0.1894$$

b. :



$$P(35 \leq X \leq 39) \approx P(35 - 0.5 \leq Y \leq 39 + 0.5)$$

$$= P\left(\frac{34.5 - 40}{\sqrt{8}} \leq Z \leq \frac{39.5 - 40}{\sqrt{8}}\right)$$

$$= P(-1.94 \leq Z \leq -0.18)$$

$$= 0.4738 - 0.071$$

$$= 0.4024$$

$$e. : P(X \geq 30) \approx P(Y \geq 30 - 0.5) = P\left(Z \geq \frac{29.5 - 40}{\sqrt{8}}\right) = P(Z \geq -3.71) = 1$$

$$d. : n = 50, n \times P = 50 \times 0.25 = 12.5, n \times P(1 - P) = 9.375$$

$$P(X \geq 30) \approx P(Y \geq 30 - 0.5) = P\left(Z \geq \frac{29.5 - 12.5}{\sqrt{9.375}}\right) = P(Z \geq 5.55) = 0$$

Best-Wise