Construire la trajectoire parabolique d'un objet soumis à la gravité

Chao-Kuei Hung Hilaire Fernandes*

Email: `ckhung@drgeo.eu` *Email:* `hilaire@drgeo.eu`

Résumé

Lorsque vous lancez un objet, sa trajectoire est une parabole. Comment est-ce que sa vitesse instantanée et ses composantes verticale et horizontale varient-elles au cours de la trajectoire ? Que se passe-t-il lorsque la vitesse initiale est plus grande ? Plus petite ? Que se passerait-il si la gravité était plus importante ? Plus faible ? Nulle ? Négative ? Avec une gravité et une vitesse initiale constantes, comment lancer l'objet pour lui faire atteindre le point le plus loin à l'horizon ? Dans cet article nous présentons un modèle pour explorer ces questions.

1 Introduction

Dans les sections suivantes nous montrerons la construction purement géométrique d'une figure modélisant la projection d'un objet soumis au champ gravitationnel. Le lecteur est supposé connaître les bases de Dr. Geo comme la construction de droites parallèles et l'édition de couleurs/noms/styles/... de points et de lignes.

Cette figure créée avec Dr. Geo aide un enseignant de physique à explorer ces questions avec ses élèves lycéens. La figure 1 illustre la figure obtenue à l'issue de cet article.

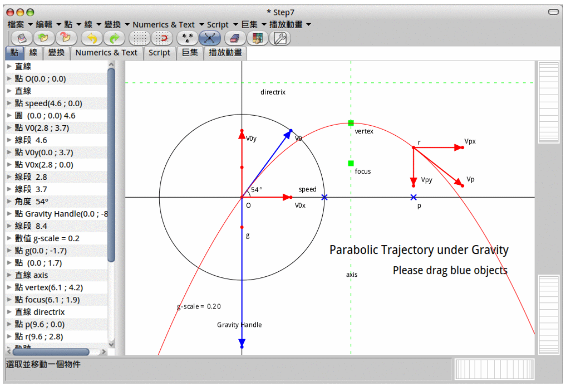

Figure 1. La figure *gravity* finale.

2 Situation initiale

a) Activer Axes et Grille magnétique dans le menu Édition.

*. Traduction et compléments

b) Créer les points H_a et H_b loin sur l'axe (ox), par exemple à (-40,0) et (40,0). Créer la droite passant par H_a et H_b, elle représente l'horizon. Cacher et verrouiller H_a et H_b.

c) Créer un cercle centré à l'origine O et passant par un point *Speed* sur l'axe (ox). Verrouiller O.

d) Créer une droite passant par O perpendiculaire à (H_aH_b). C'est l'axe (oy).

e) Désactiver Axes et Grille magnétique dans le menu Édition.

f) Créer un segment de O à un point *V0* sur le cercle. C'est le vecteur vitesse initiale.

g) Depuis *V0* construire des droites perpendiculaires ou parallèles aux axes et coupant les axes $(ox)/(oy)$ en V_{ox}/V_{oy}. Cacher les deux droites intermédiaires. Construire les segments $[OV_{ox}]$ et $[OV_{oy}]$. Ce sont les composantes dans les deux axes de la vitesse initiale.

Nous avons également besoin du vecteur de gravité. Mais vous trouveriez qu'il est difficile d'attraper et tirer le vecteur gravité directement car il est trop proche de l'origine (pour explorer d'intéressantes situations de la parabole).

Pour cela créer un point *Gravity Handle* le long de l'axe (oy) à une distance confortable, et créer le point g en tant qu'extrémité du réel vecteur de gravité, à environ 0.2 ou 0.25 fois la distance. Pour y parvenir créer un nombre nommé *g-scale* avec une valeur de 0.2 ou 0.25 puis utiliser une homothétie de centre O sur *Gravity Handle*. La figure 2 ci-dessous illustre ces constructions.

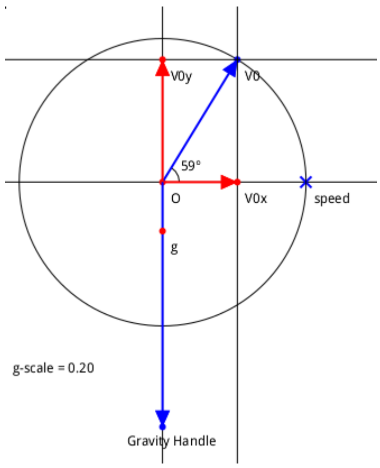

Figure 2. Les vecteurs vitesse initiale et gravité.

Télécharger la construction de cette étape : step2.fgeo.

3 Les foyer et directrice de la parabole

Pour construire la parabole, nous déterminons son foyer (*focus* en anglais) et directrice (*directrix*). Il est évident que l'axe de la parabole est la droite verticale à la distance $d = V_{ox} \times t_x$ de l'axe (oy) où t_x est le temps lorsque la composante verticale de la vitesse instantanée est nulle. Aussi $\frac{d}{V_{ox}} = \frac{V_{oy}}{-g}$.[1]

1. $V_y(t) = g \times t + V_{oy}$ comme $V_y(t_x) = 0$ alors $t_x = \frac{V_{oy}}{-g}$

Au temps t_x l'objet atteint la hauteur maximum sur sa trajectoire :

$$h_x = -\frac{1}{2}g \times t_x^2 = \frac{d \times V_{oy}}{V_{ox} \times 2}, \quad \text{aussi} \quad \frac{2 \times h_x}{V_{oy}} = \frac{d}{V_{ox}}.$$

a) Avec une symétrie axiale construire le point -g sur la partie positive de l'axe (oy).

b) Construire la droite (-gV_{ox}). Construire une droite parallèle à (-gV_{ox}) passant par V_{oy}. Cette dernière coupe l'axe (ox) en un point d. Construire la perpendiculaire à (ox) en d. C'est l'*axe* de symétrie de la parabole.

c) Construire la droite $(V_{ox}V_{oy})$. Construire une droite parallèle à $(V_{ox}V_{oy})$ et passant par d. Cette dernière coupe l'axe (oy) en un point *2h*. Construire h le milieu de *2h* et O.

d) Construire la parallèle à (ox) passant par h et coupant l'*axe* en un point *vertex*. C'est l'apex de la trajectoire, le plus haut point, nommé vertex dans la figure et sommet de la parabole.

e) Cacher les deux paires de parallèles auxiliaires ainsi que *2h* et h.

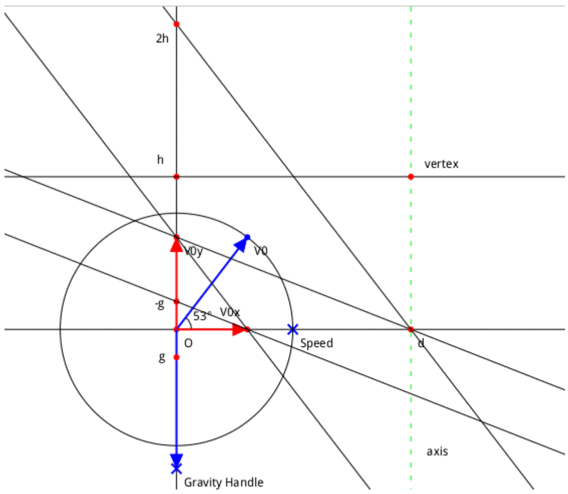

Figure 3. Déterminer le sommet de la parabole.

Télécharger la construction de cette étape : step3.fgeo.

Ensuite nous déterminons le foyer de la parabole. Il se trouve sur son axe de symétrie. Il est rappelé que toute lumière émise depuis le foyer sera réfléchie – si la parabole représente un miroir – dans une direction parallèle à son axe de symétrie, et vice versa. De même le vecteur vitesse instantanée est tangent à la parabole.

a) Construire la droite (OV) et l'utiliser pour réfléchir *Gravity handle* (g ou V_{oy} font également l'affaire) en un point G_2.

b) Construire la droite (G_2O), elle coupe l'*axe* au foyer (*Focus* dans la figure).

c) Appliquer la symétrie centrale au foyer (*focus*) et y construire une droite parallèle à (ox). C'est la directrice de la parabole.

d) Cacher les droites et points auxiliaires.

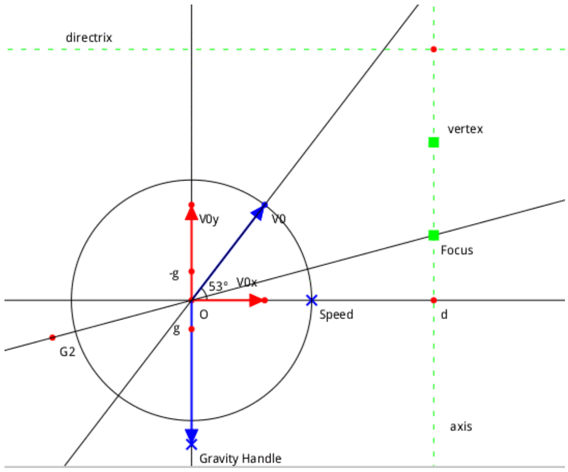

Figure 4. Déterminer le foyer et la directrice de la parabole.

Télécharger la construction de cette étape : step4.fgeo.

4 La parabole elle-même

Maintenant nous construisons la parabole. Se rappeler que c'est le lieu des points à égale distance du foyer et de la directrice.

a) Construire un point libre p sur l'axe (ox). Il est le point de contrôle de position de la vitesse instantanée.

b) Construire une droite perpendiculaire à (ox) passant par p, elle coupe la directrice en un point q.

c) Construire le segment $[Focus\ q]$ et son milieu m puis la droite (T) perpendiculaire au segment. Le point r est l'intersection de (T) et (pq).

d) Avec l'outil `Lieu` du menu `Ligne`, construire la parabole avec p comme point libre (indépendant) et r point dépendent.

e) Cacher les droites et points auxiliaires, sauf la droite *(T)*.

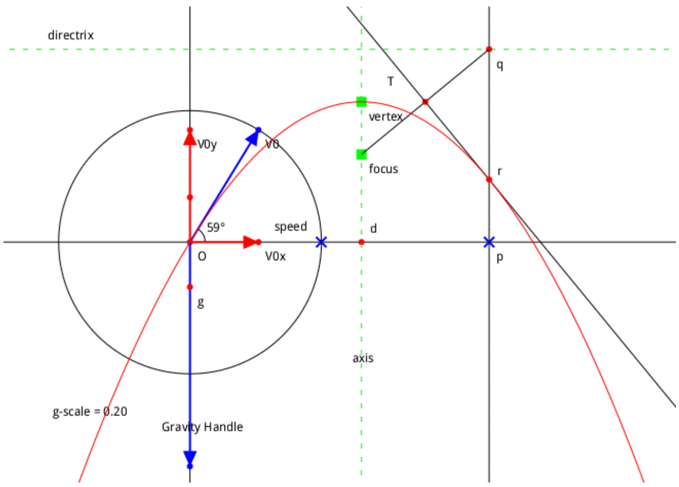

Figure 5. Construire la parabole avec l'outil `Lieu`.

Télécharger la construction de cette étape : step5.fgeo.

5 La vitesse instantanée

Finalement nous construisons le vecteur vitesse instantanée au point r.

a) Construire le vecteur $\overrightarrow{Or}$. L'utiliser pour translater le point V_{ox} en V_{px}. Construire le segment $[rV_{px}]$. La composante horizontale de la vitesse instantanée est constante.

b) La vecteur vitesse instantanée repose sur la tangente (T). Depuis V_{px} construire une droite verticale qui intercepte (T) en V_p, extrémité du vecteur vitesse instantanée.

c) Depuis V_p construire une droite horizontale pour intercepter (pr) en V_{py}, c'est l'extrémité de la composante verticale de la vitesse instantanée.

d) Cacher les constructions intermédiaires et ajouter des explications textuelles.

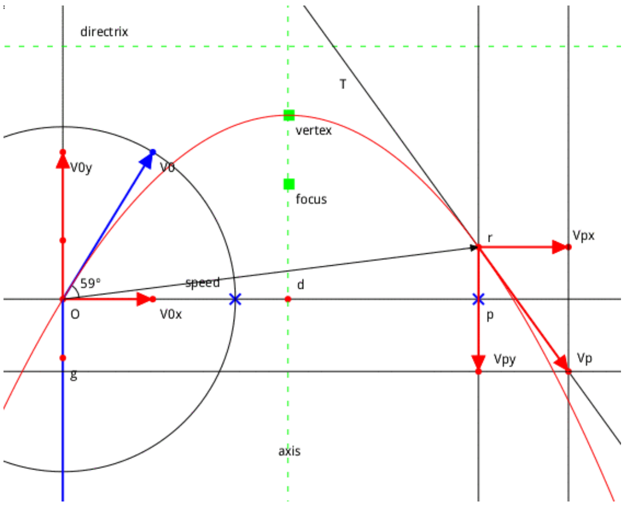

Figure 6. Le vecteur vitesse instantanée V_p et ses composantes V_{px}, V_{py}.

Télécharger la construction de cette étape : step7.fgeo.

6 Conclusion

La première ébauche de ma figure avait un problème lorsque la vitesse initiale sortait du premier quadrant $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. Je suppose qu'à une certaine étape une valeur absolue était entrée en jeu. Lors de la construction d'une figure, il est probablement plus sûr de prendre une approche avec des droites parallèles plutôt que des valeurs non-signées.

En fait Dr. Geo a des capacités de script Smalltalk très puissantes. Cependant, élaborer une figure avec uniquement des constructions basiques rend la tâche si... classique et bien plus intéressante. J'ai également appris une ou deux propriétés sur les paraboles que je ne connaissais pas en tant que lycéen (ou comme adulte).