財金論文叢刊
2009 年 12 月，第十一期，1-21

擔保債權憑證之評價與風險衡量

Risk Analysis and Valuation of Collateralized Debt Obligations

朱香蕙 (Hsiang-Hui Chu) *

國立暨南國際大學財務金融學系助理教授

吳孟學 (Meng-Hsueh Wu)**

國立暨南國際大學財務金融學系碩士

摘要

本文採用 Bharath and Shumway (2008)衡量 Merton 模型變數的研究方法模擬債權群組的違約機率，以規避傳統 Merton 模型變數之非線性方程式求解過程。並且以 Copula 函數估計債權群組之間的違約相關性，進而推導出擔保債權憑證(CDO)之公平信用價差。本文參照 Gibson(2004)衡量分券風險的指標，分析擔保債權憑證各個分券之損失乘數。模擬各個分券之結果顯示，已實現損失雖對權益分券造成損害，卻同時降低違約損失的不確定性，因此權益分券的損失槓桿倍數對存續期間之敏感度呈現遞減；反觀次級、先償順位分券，期初投入的本金所受到的保護層縮水，對違約事件的敏感程度相對提高，其損失槓桿倍數隨時間經過而上升。最後，本文發現以 Bharath and Shumway(2008)方法所求算之非預期損失率對預期損失率的增加幅度相對於原始 Merton 模型低，顯示較能捕捉極端違約事件，對已實現損失的衡量精確度相對提高。

關鍵詞：擔保債權憑證、Merton 模型、Copula 函數、傳染效應、槓桿倍數

*聯絡作者，國立暨南國際大學財務金融學系助理教授，54542 南投縣埔里鎮大學路一號，電話：(049)291-2693 #4622，E-mail：hhchu@ncnu.edu.tw。
**國立暨南國際大學財務金融學系碩士，E-mail: zfevsnz0724@hotmail.tw。

Abstract

This article we investigate the valuation and risk management issues of collateralized debt obligations (CDOs). We use the naïve approach proposed by Bharath and Shumway(2008) to avoid simultaneously solving the two nonlinear equations in Merton's model. And we construct Copula functions to describe the dependent structure because the contagion effect of collateral pool has an important impact on fair premium of different tranches. The risk of CDO tranches can be measured in various ways, and we present two risk measures by Gibson (2004). The simulated results show that the equity tranche has relatively more risk than others and the uncertainty of realized loss would become insensitive to the maturity of CDOs. On the contrary, the protected levels of the senior tranche would be gradually weak, thus its leverage numbers become more sensitive. Finally, in comparison with Merton model, we find that the increasing amount of unexpected loss relative to expected loss computed by the naïve alternative model significantly declines, so this implies that the accuracy of estimated realized loss increases. We conclude that the undervalued default probabilities would be improved by the naïve alternative model; that is, predicting the default events of CDO becomes more accurate.

Keywords: CDOs, Merton Model, Copula Function, Contagion Effect, Leverage

壹、前言

2007 年 4 月 2 日由於房貸風險升高，美國第二大次級房貸公司新世紀金融公司(New Century Financial)宣布破產，美國抵押貸款風險浮出台面，揭開次級房貸風暴的序幕；在 2008 年 7 月 13 日美國兩大房貸機構，房利美(Fannie Mae)與房地美(Freddie Mac)爆發財務危機；在 2008 年 9 月 15 日全球第三大投資銀行雷曼兄弟(Lehman Brothers)宣告申請破產保護，連鎖效應漫延至今的全球金融海嘯。全球金融海嘯成因最主要爲金融全球化及信用衍生性商品的快速擴張，眾多銀行將次級房貸經由證劵化，將大筆長期、低流動性的債券從資產負債表上移轉給特殊目的機構(Special Purpose Vehicle；SPV)，包裝出售並且再將套現的資金再度承貸，使得牽涉到擔保債權憑證(Collateralized Debt Obligation；CDO)的金額因乘數效果放大，所以波及範圍之廣。

在 2008 年初，德國財政部長 Steinbruck 於七大工業國(G7)財政部會議上表示，預計 G7 因次級房貸風暴所造成的損失約 4000 億美元；金管會在 2008 年 1 月 29 日公布，台灣金融產業由於持有次級房貸相關商品，初步預計損失約新台幣 237.03 億元(註1)。根據公開資訊觀測站的數據統計，2008 年 12 月台灣金融控股公司的損失總和已達新台幣 156.5 億元，而整年度稅後淨利縮水不到百億元，突顯信用風險管理的重要性。Hull(2008)認爲一般民眾選擇投資標的物只盲從信用評等的等級，往往忽略商品背後的槓桿乘數，此外 CDO 評價模型的建構不夠完善，且缺乏資料去驗證，因此，如何精準的評價擔保債權憑證成爲學術界與實務界重要的議題。

本文探討債權群組之間的違約相關性，並透過市場上公開的資訊，建立一套擔保債權憑證之評價模型，希望能提高 CDO 公平信用價差之精確性；並且計算其風險衡量指標，探討 CDO 各個分劵隱含的損失槓桿倍數。過去許多信用風險模型研究指出原始 Merton 模型的假設不合實際市場，如:假設資產報酬率服從常態分配，變數的衡量方式與非線性方程式求解過程的邊際效應，兩者皆造成低估違約機率的可能性變高；再者，林妙宜 (2002)與陳業寧、王衍智與許鴻英(2004)採用國內企業爲樣本之實證研究發現原始 Merton 模型之違約預測力低於會計資訊模型或信用評分模型。在信用衍生性商品的模型探討投資群組中，最重要的參數爲群組彼此的違約相關性，亦即違約事件之間存在傳染效應(Contagion Effect)。因此本文參照 Bharath and Shumway (2008)簡易的 Merton 模型，將資產市值與違約風險做連結，並利用 Copula 函數來描述債權群組之間的違約相關性，估算出個別債務人的違約機率。

結果顯示，相對原始 Merton 模型，簡易的 Merton 模型較能捕捉極端違約事件，對已實現的損失估計較爲精確,因此 CDO 各個分劵估算出的信用價差較爲適當,本文研究 CDO 的評價模型提供一較爲精確的初步評價基礎。本文的內容安排爲：第貳章回顧信用風險模型與 CDO 評價之相關研究；第參章介紹研究方法；第肆章爲模擬結果與分析槓桿乘數；第伍章總結研究結果。

貳、文獻探討

擔保債權憑證 CDO 包括多個信用風險的資產，故信用風險性資產的違約機率與資產之間的相關性將決定整體的損失情形，進而影響 CDO 的評價。因此不論是投資機構或購

註1：資料來源自國際經濟情勢雙週報第 1648 期。

回權益分券的發行機構而言，債權群組的信用風險評價極度重要。信用風險模型是否能精確地捕捉債權群組各公司的違約相關性，為 CDO 評價結果的一大關鍵。

一、信用風險模型

信用風險模型主要發展成兩種類型，一為結構式模型(Structural Form Models)，另一種為縮減式模型(Reduced Form Models)。

結構式模型又可稱公司價值模型，Merton 模型(1974)延伸 Black and Sholes(1973)概念於公司價值，將其視為一以公司資產為標的且執行價為零息公司債的歐式買權。將債權到期日時公司資產價值觸及一個外生性的門檻值視為違約，並應用 Black-Scholes 公式求算公司權益和債務的價值，進而求出公司違約機率 $N(-d_2)$ 。

結構式模型的後續發展主要是放寬 Merton 模型不合理的假設，讓模型更貼近市場真實情況。原始模型僅探討債權到期時，企業是否有違約事件產生，故 Black and Cox(1976)提出首次級通過模型(First Passage Time Model)，改善 Merton model 僅考量到期日的違約機率且負債價值無隨時間而變動的缺失，設立門檻值為一指數函數， $C(t)=C\cdot e^{-\upsilon(T-t)}$ 。Longstaff and Schwartz(1995)發展二因子模型於風險性負債價值，考量無風險利率屬於隨機過程且加入破產成本 α 於模型中，違約門檻訂定為外生變數且提供符合一定態的資本結構假設。Leland and Toft(1996)分析公司債價值與最適資本結構在同一基礎假設下，考量稅賦(η)與破產成本二重要影響因子推導一內生的違約門檻。Collin-Dufresne and Goldstein(2001)設立目標財務槓桿比率為一隨機過程且依賴公司價值的演變，可讓結構性模型更加一致實證分析。

縮減式模型為危險率(Hazard Rate)模型之延伸，來自於醫學界利用統計數據來預測疾病發生率的一種方法，而後引入財務領域。由於違約事件的發生符合稀少且離散可數的事件定義，故滿足卜瓦松分配(Poisson Distribution)，Jarrow and Turnbull(1995)以其為基礎首先提出縮減式模型，又稱之違約強度模型(Intensity Model)。以縮減式模型衡量違約機率的文獻，Lando(1998)額外納入利率因素；Jarrow and Yu(2001)則分析不同公司間信用風險相關性對違約造成的影響；Davis and Lo(2001)與 Giesecke and Weber(2003)提出可利用假設公司具同質性(Homogeneity)與對稱性(Symmetry)的條件獲得封閉解，但相對的此種假設將喪失一般性。

傳統結構式模型的優點在於具有直觀意義且同時可連結股票市場，缺失則是無法保證不存在套利機會以及違約可預測性(Default Predictable)所導致的短期信用風險價差為零的現象，不符市場上實際所觀察的(註2)；縮減式模型的優點在於評價信用衍生性商品上較簡易，其透過總體經濟數據作為影響信用價差的變數，也使資料的取得較為容易且較具時效性，但實際上市場並非完美市場，金融商品的交易伴隨著流動性風險的暴露，故可能存在一定之套利空間，並且信用風險主要透過外生決定的違約機率與回復率來表達較不具經濟直覺，由於違約機率是依照產業或公司信用評等而來，若產業或公司無法提供信用機構之評等，或是信用機構評等的資料未更新，皆無法正確地反應在評價上。

註2：Leland (1994), “Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure,” *Journal of finance*, Vol. 49, 1213-1252.

二、CDO 評價相關文獻

Li(2000)首次將存活時間的違約相關係數假設爲資產報酬率之間的相關係數，經由 Gaussian Copula 來捕捉資產的違約時點。廖四郎、李福慶(2005)選擇不同 Copula 針對 CDO 進行評價與風險控管的敏感度分析，當資料具有厚尾和波動群聚現象，選擇 Student-t Copula 爲較佳的估計函數。Meneguzzo and Vecchiato (2004) 、連惟志 (2006) 與 Shu-Ying Lin and Gang Shyy (2008)研究信用價差對違約相關性的敏感分析，就權益、初級分券而言，信用價差與違約相關係數呈反向走勢，而先償順位分券之信用價差則與違約相關係數屬於正向關係。

黃裕烈(2007)利用 Merton 模型將資產市值與違約風險作連結，不需透過特殊的違約交換合約資料與債務人的歷史違約資料，即可估算個別資產的違約機率。模擬分析將資料區分標的組與對照組，佐證債務人的信用評等爲影響分券信用價差的主要因子；若發行者忽略債務人彼此之間的違約相關性，各分券所賦予的公平信用價差將會被低估，而增加投資者的風險；在常態分配的假設下，低估違約機率造成各個分券的信用價差產生偏誤。盧琬靖(2007)使用 Merton 模型衡量 CDO 之信用價差，並且探討 CDO 分券之槓桿效果。以 10 倍槓桿投資分券時，持有人的投資報酬會隨著債權群組違約公司家數的增加而減少；各個分券面臨債權群組的違約時點愈早，所收到的利息收入即報酬率也越低；當違約家數越多，即使投資者於各個付息時點皆收到利息收益，整體投資報酬率仍可能面臨負值的情形。陶亞蘭(2008)求算 CDO 的隱含相關係數(Base Correlation)，但由於台灣市場未有 CDS 指數交易，所以透過黃裕烈(2007)的研究模擬假設下，推算債權群組的指數信用價差。其實證結果，隨 CDS 指數的信用價差增加，獲得求算的隱含相關係數個數愈多，直到指數價差高至 60bps 以上，才使所有分券可計算出合理的隱含相關係數，說明指數信用價差的低估，反應原始 Merton 信用風險模型低估了違約機率。

根據上述的文獻回顧，我們可以發現在原始 Merton 模型基本假設下，低估違約機率的可能性較高，直接地影響至 CDO 各個分券信用價差的精確度。因此本文將 Bharath and Shumway(2008)簡易的 Merton 模型套入 CDO 評價模型中，模擬 CDO 債權群組的違約時點，降低違約機率低估的可能性，以提升各分券公平價差之精確度。

參、研究方法

本文假設 CDO 債權群組中包含 n 家公司，根據 Sklar(1959)定理，債權群組違約時點的聯合分配 $F(t_1,t_2\ldots,t_n)=P(\tau_1\le t_1,\tau_2\le t_2,\ldots,\tau_n\le t_n)$ 可以由個別公司違約分配及 n 維的 Copula 函數表達成 $F(t_1,t_2\cdots,t_n)=C(F_1(t_1),F_2(t_2)\cdots,F_n(t_n))$ ，再搭配原始與簡易的 Merton 模型模擬出債務人的違約時點 $t^*=F_i^{-1}(u_i)=\inf\{t\mid\hat{F}_i(t_i)\ge u_i\}$，求算 CDO 的公平信用價差。最後依照 Gibson(2004)，模擬出的預期損失爲基礎，定義出 CDO 的風險衡量指標，探討兩個模型背後隱含的損失槓桿倍數。

一、CDO 之評價

CDO 債權群組中某一標的資產發生違約事件，債權人最關心的爲能拿回多少本金，本文考慮 CDO 的債權群組含有 n 個標的資產，其個別名目本金(Notional Amount)爲 A_i；CDO 的發行總面額爲 $A=\sum_{i=1}^{n} A_i$；違約回復率(recovery rate)爲 R_i，當第 i 家公司在時間點 T 之前發生違約時，對債權群組造成的淨損失(loss given default；LGD)爲 $l_i=(1-R_i)A_i$。由於不同債權之違約時點不近相同，本文令 $I_{\{\}}$ 爲一個指標函數(indicator function)，而 $I_{\{t_i^*<T\}}$ 數值爲 1 表示第 i 家公司在時間點 T 之前違約，則 CDO 總累積損失爲 $L(t)=\sum_{i=1}^{n} l_i I_{\{t_i^*<T\}}$。

CDO 各分券發行等級可依承擔違約損失的先後順序，界定一組損失臨界點 $\vartheta=\{\vartheta_0,\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3\}$ 來區分，其中 $0=\vartheta_0<\vartheta_1<\vartheta_2<\vartheta_3=A$，而第 j 種等級的分券損失承受範圍爲 $(\vartheta_{j-1},\vartheta_j]$，其損失分配情形以圖 1.示之。

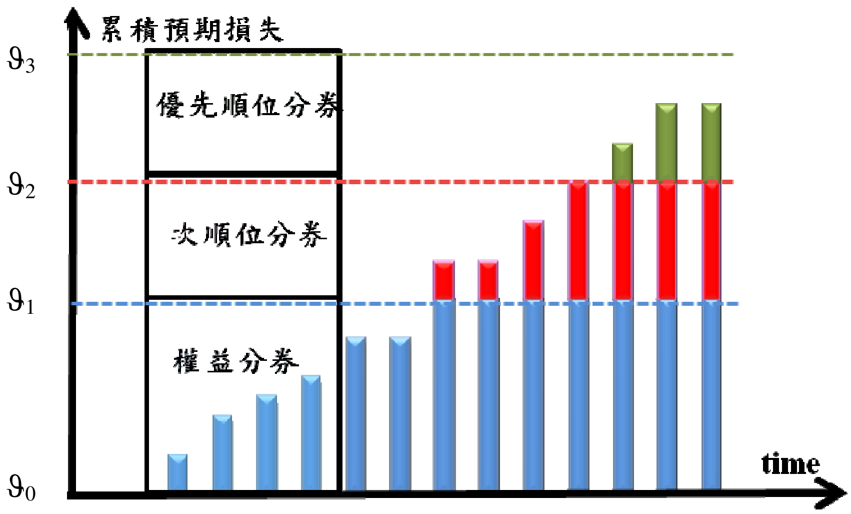

圖 1. CDO 各分券不同時點之損失分配圖

以權益分券爲例，當 $\vartheta_0<L(t)\le\vartheta_1$ 時，表示在 t 時點的總累積損失未超出權益分券承受範圍的上限(圖 1.中藍色虛線)，將由權益分券的投資者吸收所有損失(圖 1.中藍色 bar)，其餘等級分券的投資者則完全不受影響，亦即次級順位與先償順位分券的淨損失爲零；當 $\vartheta_1<L(t)\le\vartheta_2$ 時，表示總累積損失已超出權益分券損失的上限，但低於次級順位分券的上限(界於圖 1.中紅色與藍色虛線間)，權益分券的投資者最大承擔的損失金額爲 $\vartheta_1-\vartheta_0$，但仍不足彌補債權群組的總累積損失，因此次級順位分券的投資者將接續吸收剩餘的損失，其承擔的損失金額爲 $L(t)-\vartheta_1$，次級順位分券投資者之淨損失以圖 1.中紅色直條表達之，以此類推可用數學式表達任一等級分券的投資者於 t 時點所需承受的損失金額：$M_j(t)=\max\left(\min\left(L(t),\vartheta_j\right)-\vartheta_{j-1},0\right)$，其中 ϑ_{j-1} 爲分券 j 之損失起賠點(attachment point)，而

ϑ_j 則爲分券 j 之損失止賠點(detachment point)，其分券 j 最大之損失 $\vartheta_j - \vartheta_{j-1}$，亦分券 j 期初投入的名目本金。

若設B(0,t)爲t時點的折現因子，則第j種分券在CDO到期前所承受的期望損失(Default Leg；DL)現值爲 $E^Q(DL) = E^Q\left[\int_0^T B(0,t)\,dM_j(t)\right]$，其中 $E^Q(\cdot)$ 爲風險中立假設下的期望值。

當違約事件發生的情形，各個分券的投資者不但吸收債權群組的損失，連同可能的利息收入也無法收回，亦即僅有剩下未違約的資產將繼續付息，相對使得其投入本金減少，因此會影響投資者後續收到的溢酬金額。假設 CDO 存續期間爲 T 年，發行者每年付息 K 次，付息時點爲 s_κ $(\kappa = 1,\ldots,TK)$，且根據投資者所投資的分券不同，每年應給予不同的公平信用價差 W_j。投資第 j 種分券的投資者於各付息時點所收到的溢酬金額(Premium Leg；PL)爲 $\frac{W_j}{K}\pi(s_\kappa)$，其中 $\pi(s_\kappa)$ 表示於付息點 s_κ 購買第 j 種分券的投資者在付出違約給付金額後所剩餘的投資本金爲：

$$\pi_j(s_\kappa) = \vartheta_j - \vartheta_{j-1} - M_j(s_\kappa) = \min\left(\max\left(\vartheta_j - L(s_\kappa),\ 0\right),\ \vartheta_j - \vartheta_{j-1}\right)$$

以權益分券爲例，當 $\vartheta_0 < L(s_\kappa) \le \vartheta_1$ 時，表示付息時點 s_k 的總累積損失未超出權益分券的止賠點(圖 1.中藍色虛線)，權益分券持有人的部份期初名目本金吸收 CDO 的損失(圖 1.中藍色長條)，因此其剩餘的名目本金爲藍色虛線與藍色長條之間的距離，至於其餘等級分券的投入金額則完全不受影響，次級順位分券以紅藍兩色虛線的距離表示之，而先償順位分券則爲綠紅兩虛線的距離；若 $\vartheta_1 < L(s_\kappa) \le \vartheta_2$ 時，表示總累積損失已超出次級順位分券的起賠點，但低於次級順位分券的止賠點(界於圖 1.中紅色與藍色虛線間)，權益分券的投資者最大承擔的損失金額爲 $\vartheta_1 - \vartheta_0$，故其投入的本金化爲零，而剩餘的損失由次級順位分券的投入金額接續吸收，次級順位分券投資者之淨投入金額以圖 1.中紅色虛線與紅色長條的距離表達之，以下類推。

在無套利空間的條件下，分券 j 投資者的溢酬金額之現值應等於違約支出之現值(PL=DL)，以估算 CDO 各個分券公平的信用價差 W_j：

$$W_j = \frac{K \cdot E^Q\left[\int_0^T B(0,t)\,dM_j(t)\right]}{E^Q\left[\sum_{\kappa=1}^{TK} B(0,s_\kappa)\cdot \min\left(\max\left(\vartheta_j - L(s_\kappa),\ 0\right),\ \vartheta_j - \vartheta_{j-1}\right)\right]} \tag{1}$$

而在信用衍生性商品的模型中，違約事件之間存在傳染效應(Contagion Effect)，本文搭配 Copula 函數來捕捉債權群組之間的違約相關性，不同 Copula 函數對傳染效果之奏效強弱有所區別。

二、Copula 函數

Copula 函數(註3)爲多變量之累積機率分配，Copula 函數 $C(\cdot)$ 必需滿足三個數學特性：grounded $\left\{C\left(u_1,\ldots,0,\ldots,u_n\right)=0,\ u_i\in[0,1]\right\}$ 、margin $\left\{C\left(1,1,\ldots,u_i,\ldots,1\right)=u_i\right\}$ 與 n-increasing。

假設 n 個債權的違約時點爲隨機變數 $t_1,t_2\cdots,t_n$，其所有經過機率轉換 $\left(F_i\left(t_i\right)=u_i\right)$ 的邊際累積機率分配皆服從均一分配 $U(0,1)$，以數學表示爲：

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\Pr\left(U_1\le u_1,U_2\le u_2,\ldots U_n\le u_n\right)$$

再根據 Sklar(1959)定理，對於某個 n 維度的聯合累積機率分配函數 $F\left(t_1,t_2\ldots,t_n\right)$，其第 i 個維度的邊際累積分配爲 $F_i\left(t_i\right)$，$F\left(t_1,t_2\ldots,t_n\right)$ 與其對應之 Copula 函數滿足以下關係：$F\left(t_1,t_2\cdots,t_n\right)=C\left(F_1\left(t_1\right),F_2\left(t_2\right)\cdots,F_n\left(t_n\right)\right)$，透過此式我們能將一個多維的邊際機率分配，拆解成單維的邊際機率分配與相關性的結構：

$$f\left(t_1,\ldots t_n\right)=c\left(u_1,\ldots u_2\right)\cdot\prod f_i(t_i) \tag{2}$$

顯示一個多維的邊際機率分配 $f\left(t_1,\ldots t_n\right)$ 可拆成兩大部份，前者爲 Copula 的邊際分配，作爲隨機變數 $t_1,t_2\cdots,t_n$ 之間的關聯性，亦即變數彼此之間的共同移動(co-movement)；後者爲各個隨機變數單純的邊際機率乘積。Copula 函數類型主要分成 Gaussian、Student-t 與 Archimedean Copulas 這三大類，其中以 Gaussian Copula 最廣泛使用，而後兩種較適用於強調極値相依(Tail Dependence)的現象或違約傳染效果。

Gaussian Copula 假設存在著對稱且正定的相關矩陣 Σ，則其 Copula 函數定義：$C_\Sigma^G(u_1,\ldots,u_n)=\Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_n))$，其中 $\Phi_\Sigma^{-1}(\cdot)$ 爲多變量常態分配函數；$\Phi^{-1}(\cdot)$ 爲單變量標準常態分配的反函數。當任意兩家公司的違約相關係數 $\rho\left(t_i,t_j\right)\ne 1$ 時，其尾端相依程度爲：

$$\lambda_U=\lim_{u\to 1^-}p(t_i>F_i^{-1}(u)\mid t_j>F_j^{-1}(u))=0$$

$$\lambda_L=\lim_{u\to 0^+}p(t_i\le F_i^{-1}(u)\mid t_j\le F_j^{-1}(u))=0$$

隱含第 i 家公司與第 j 家公司同時處在極端狀況機率爲 0，倘若債權群組中任意兩家公司的違約情況與此不符，則 Gaussian Copula 並不適合用來描述債權群組的違約相關性。

經由 Meneguzzo and Vecchiato (2004)的說明，Gaussian Copula 的模擬相當簡易，其步驟爲：(a)使用 Cholesky 分解多重常態分配的相關係數 $\psi\psi'=\Sigma$；(b)以標準常態分配來模擬 n 個獨立的隨機變數 $z=\left(z_1,z_2\cdots,z_n\right)'$；(c) $u_i=\Phi\left(x_i=\psi z\right)$。

註3：內文參考 Cherubini, Umberto, Elisa Luciano, and Walter Vecchiato (2004), *Copula Methods in Finance*, New York: Wiley.

Student-t Copula 假設存在著對稱且正定的相關矩陣Σ，則其 Copula 函數定義：

$C^{t}_{\Sigma,v}(u_1,\ldots,u_n)=t_{\Sigma,v}(t_v^{-1}(u_1),\ldots,t_v^{-1}(u_n))$，其中$t_{\Sigma,\nu}(\cdot)$為自由度$\nu$的多變量 t 分配函數；而

$t_v^{-1}(\cdot)$為自由度ν之單變量 t 分配反函數。Student-t Copula 其尾端相依程度為

$\lambda_U=\lambda_L=2-2t_{v+1}[(\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho})^{0.5}]$，因此相較於 Gaussian Copula 有較厚的尾端，可描述債權群組的違約傳染效應。

Student-t Copula 的模擬與 Gaussian Copula(a)與(b)兩個步驟一樣，再從自由度ν的卡方分配模擬與 z 獨立的一個隨機變數 s，因此由 Student-t Copula 抽取一組 u 以下列數學式獲得：

$$u_i=t_v(y_i=\sqrt{v/s}\cdot x_i)$$

Archimedean Copula 群組，以$C(u_1,u_2,\ldots u_n)=\varphi^{-1}\left[\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)\right]$表示之，其中不同的$\varphi(\cdot)$就產生不同的 Archimedean Copula 函數。而 Clayton Copula 設定$\varphi(u)=u^{-\alpha}-1\ with\ \alpha>0$，其反函數$\varphi^{-1}(t)=(t+1)^{-1/\alpha}$，因此 Clayton Copula 以數學式表達成：$C^{C}_{\alpha}(u_1,\ldots,u_n)=\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^{-\alpha}-n+1\right]^{-1/\alpha}$，若以圖形描繪可觀察得知 Clayton Copula 函數之左尾機率值大於右尾，較適合用來捕捉台灣以中小企業為主之債權群組相關性，其尾端相依程度(tail dependence)分別為$\lambda_L=2^{-\frac{1}{\alpha}}$與$\lambda_U 2-2^{\frac{1}{\alpha}}$。Clayton 模擬不似橢圓型分配的方式，需透過條件抽樣(Conditional Sampling)模擬：

$$C_k\left(u_k \mid u_1,\cdots,u_{k-1}\right)=P\left(U_k\le u_k \mid U_1=u_1,\cdots U_{k-1}=u_{k-1}\right)$$

$$=\frac{\partial^{k-1}C_k\left(u_1,\cdots u_k\right)}{\partial u_1\partial u_2\cdots\partial u_{k-1}}/\frac{\partial^{k-1}C_{k-1}\left(u_1,\cdots u_{k-1}\right)}{\partial u_1\partial u_2\cdots\partial u_{k-1}}$$

$$=\frac{\varphi^{-1(k-1)}(c_k)}{\varphi^{-1(k-1)}(c_{k-1})}$$

其中$\varphi^{-1(k)}(\cdot)$表示$\varphi^{-1}(\cdot)$的 k 階微分(註4)，而$c_k=\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_k)$，因此模擬一組$(u_1,u_2,\ldots,u_n)'$抽樣步驟為：利用均一分配(uniform distribution)抽取一組隨機變數$(v_1,v_2,\ldots,v_n)'$，且訂定$u_1=v_1$；假定$v_2=C_2(u_2 \mid v_1)$，再根據條件抽樣的數學式得知

註4：$\varphi^{-1(k)}(t)=\frac{\partial^k\varphi^{-1}(t)}{\partial t}=(-1)^k\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)}{\alpha^k}(t+1)^{-k-\frac{1}{\alpha}}$

$v_2=\dfrac{\varphi^{-1(1)}(c_2)}{\varphi^{-1(1)}(c_1)}$，推導獲得 $u_2=(v_1^{-\alpha}(v_2^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}-1)+1)^{-1/\alpha}$，…

$$u_n=\left\{(\sum_{i=1}^{n-1}u_i^{-\alpha}-n+2)\cdot(v_n^{\frac{\alpha}{\alpha(1-n)-1}}-1)+1\right\}^{-1/\alpha}。$$

在進行違約時點的模擬前，首先需估計各種 Copula 函數之參數。本文依照黃裕烈(2007)提供的方式，利用 Canonical Maximum Likelihood(CML)估計所需參數，包括 Σ、ν 與 α，並假設債權群組違約時點的相關性可利用各資產報酬率的相關性估算。估計 Copula 函數中的參數如下：令 $r_{i,t}$ 表示第 i 家公司在第 t 期的資產報酬率，並透過經驗累積分配函數將 $r_{i,t}$ 轉換成 $\hat{u}_{i,t}$，其中 $0\le\hat{u}_{i,t}\le 1$，$i=1,2,\ldots,n$ 且 $t=1,2,\ldots,T$。Gaussian Copula 函數的參數估計可表示成 $\hat{\Sigma}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\xi_t\xi_t^{'}$，其中 $\xi_t=(\Phi^{-1}(\hat{u}_1),\ldots,\Phi^{-1}(\hat{u}_n))$。Student-t Copula 的參數則利用 Kendall's tau($\hat{\tau}$)估算出相關係數 $\hat{\Sigma}$：$\hat{\Sigma}_{i,j}=sin\left(\frac{\pi}{2}\hat{\tau}_{i,j}\right)$，再利用求出的相關係數以 CML 方法，求取 Student-t Copula 機率密度函數的最大概似估計值來估計所需 ν (自由度)，數學式表達成：$\hat{\nu}=\arg\max\limits_{\nu\subset(2,\infty)}\sum_{t=1}^{M}\log\left(c^t\left(\hat{u}_{i,t},\ldots,\hat{u}_{n,t};\ \nu,\ \hat{\Sigma}\right)\right)$，其中根據式(2)，得知

$$c^t(u_1,\ldots,u_n)=\frac{t_{\Sigma,\nu}\left(\xi_{1,t},\ldots,\xi_{n,t}\right)}{\prod t_\nu(\xi_{i,t})}$$

整理成 $$c^t\left(\hat{u}_{i,t},\ldots,\hat{u}_{n,t};\ \nu,\ \hat{\Sigma}\right)=\left|\hat{\Sigma}\right|^{-0.5}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^n\right)\left(1+\frac{1}{\nu}\xi_t^{'}\hat{\Sigma}^{-1}\xi_t\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\left(\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^n\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{\xi_{i,t}^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}}$$

其中 $\xi_t=(\xi_{1,t},\ldots,\xi_{n,t})^{'}$，$\xi_{i,t}=t_\nu^{-1}(\hat{u}_{i,t})$，而 $\Gamma(\cdot)$ 爲 Gamma 函數。Clayton Copula 函數之參數 α 估計類似 Student-t Copula 函數，最佳參數估計量以最大概似估計值爲基準，$\hat{\alpha}=\arg\max\limits_{\alpha>0}\sum_{t=1}^{M}\log\left(c^C\left(\hat{u}_{i,t},\ldots,\hat{u}_{n,t};\ \alpha\right)\right)$，

其中 $$c^C\left(\hat{u}_{i,t},\ldots,\hat{u}_{n,t};\ \alpha\right)=\alpha^n\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\left(\prod_{i=1}^{n}u_i^{-\alpha-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^{-\alpha}-n+1\right)^{-\frac{1}{\alpha}-n}。$$

由上述提及的方法抽取的 u 後，代入 $t^*=F_i^{-1}(u_i)=\inf\left\{t\mid\hat{F}_i(t_i)\ge u_i\right\}$ 模擬各資產債權的違約時點，其中 $\hat{F}_i(t_i)$ 本文以 Bharath and Shumway (2008)簡易 Merton 模型與原始結構

式信用風險模型衡量之。

三、簡易的 Merton 模型

Merton(1974)模型延伸 Black and Scholes(1973)所提出的選擇權評價理論於信用風險的衡量，將權益市值$(V_{i,E})$視為標的資產為公司資產價值$(V_{i,A})$，且執行價為公司負債 D 的買權，依照 Black and Scholes(1973)的推論可表達成：

$$V_{i,E}(0)=V_{i,A}(0)\Phi(d_1)-D_i e^{-rt}\Phi(d_2) \tag{3}$$

$$d_1=\frac{ln(V_{i,A}(0)/D_i)+(r+0.5\sigma_{i,A}^2)t}{\sigma_{i,A}\sqrt{t}}$$

$$d_2=\frac{ln(V_{i,A}(0)/D_i)+(r-0.5\sigma_{i,A}^2)t}{\sigma_{i,A}\sqrt{t}}=d_1-\sigma_{i,A}\sqrt{t}\text{ 。}$$

假設權益市值與資產市值滿足幾何布朗運動(GBM)，再根據 Ito's Lemma 整理得知

$$dV_{i,E}(t)=(f_1+\Phi(d_1)rV_{i,A}+0.5f_{11}\sigma_{i,A}^2V_{i,A}^2)dt+\Phi(d_1)\sigma_{i,A}V_{i,A}dW^Q(t)$$

其中，f_1,f_2分別為權益市值函數$f(\cdot)$對$V_{i,A}$與 t 一階偏微分，而f_{11}則是$f(\cdot)$函數對$V_{i,A}$的二階偏微分；相較下便可獲得資產市值波動性與權益市值波動性之關係式：

$$\sigma_E={V_A\sigma_A}\big/{V_E}\,\Phi(d_1) \tag{5}$$

再將(3)和(5)式配合 Newton-Raphson Method 以求解非線性聯立方程式，獲得資產市值與波動性。已估算出主要模型中的參數值，即可計算第 i 家公司在風險中立機率測度下的違約機率為：

$$\hat{F}_i(t)=\Phi(-DD_i(t))=\Phi(-d_2) \tag{6}$$

Crobie and Bohn(2001)提及到實際市場的走勢變幅與式(5)差距極大，故 Bharath and Shumway (2008)避免非線性方程式求解過程之邊際效應影響到違約風險的估計，因此在相同的財務資訊下發展一簡易的方法。

Bharath and Shumway (2008)假設債權的波動率為回應期間結構波動率的 5%，加上股權波動的 25%衡量之($\tilde{\sigma}_D=0.05+0.25\sigma_E$)，因此經由加權平均後得知資產波動率為：

$$\tilde{\sigma}_A=\frac{V_{i,E}}{V_{i,E}+D}\sigma_E+\frac{D}{V_{i,E}+D}\tilde{\sigma}_D \tag{7}$$

且資產市值以權益市值加上門檻值($\tilde{V}_{i,A}=V_{i,E}+D$)衡量，因此式(6)違約機率改寫為：

$$\tilde{F}(t_i)=\Phi(-\frac{\ln(\tilde{V}_{i,A}/D_i)+(r-0.5\tilde{\sigma}_{i,A}^2)t}{\tilde{\sigma}_{i,A}\sqrt{t}})\text{ 。}$$

四、風險衡量指標

Hull(2008)指出投資大眾對證券化及其衍生的信用商品之熟悉度不高，往往忽略背後隱含的損失乘數，陷入投資標的物屬於信用評等較佳之符號迷失中。假若相同屬於 AAA 等級的先償順位的分券，但投資群組分別為債權群組或擔保債權憑證之資產池，其所承擔的損失槓桿倍數有所不同，反應所面臨的風險高低。期望損失為一絕對損失的金額，無法用以衡量各個分券之相對風險大小，故本文藉以前三小節所獲得的結果，依據 Gibson(2004)提及的兩種衡量 CDO 風險指標，分別為期望損失的槓桿倍數與非預期損失的槓桿倍數，以反應各個分券的風險特徵。

Gibson(2004)定義期望損失率為各個分券的預期損失金額對其所投入的名目本金之比例，而預期的損失槓桿倍數則以各個分券的預期損失率除以債權群組期望損失率衡量之，表達該分券每一單位本金所承擔的損失為整個群組一單位本金所承擔的倍數，因此分券 j 之期望損失槓桿倍數，其數學式表達：$\frac{E[M_j(t)]}{\vartheta_j - \vartheta_{j-1}} \Big/ \frac{E[M(t)]}{\sum A_i}$，其中 $E[M_j(t)]$ 為 j 分券在時點 t 下的期望損失，$E[M(t)]$ 則為債權群組之期望損失。

非期望損失則定義為各個分券的絕對損失金額加上一個標準差，隱含著重大損失情境下所需承擔的損失金額，j 分券在時點 t 下的非期望損失以數學式表達：$\bar{M}_j(t) = E[M_j(t)] + SD_j$，$SD_j = \sqrt{E\left(M_j(t) - E(M_j(t)\right)^2}$ 為 j 分券的損失標準差。同樣可計算出非預期損失率，進而獲得非預期損失槓桿倍數，故其 j 分券的非預期損失槓桿倍數：$\frac{\bar{M}_j(t)}{\vartheta_j - \vartheta_{j-1}} \Big/ \frac{\bar{M}(t)}{\sum A_i}$。

肆、實證結果

本文利用原始與簡易的 Merton 模型，搭配 Gaussian, Student-t 及 Clayton 三種 Copula 函數，評價擔保債權憑證之信用價差，並且比較不同違約回復率對其之影響。最後，依照 Gibson (2004)計算出 CDO 的風險衡量指標，分析在原始與簡易的 Merton 兩個信用風險模型下，對 CDO 損失槓桿倍數的變化，此外納入 CDO 的存續期間走勢對其槓桿倍數有何影響。

一、資料選取

依國際指數公司(International Index Company；IIC)的編製規定(註5)，本文選取出信用評等等級在 BBB 以上的台灣企業，作爲本研究 CDO 資產池之標的資產，包含上市企業 21 家、商業銀行 5 家、證券商 3 家與保險公司 3 家，共計 32 家。假設各家公司之名目本金皆設立爲新台幣一千萬，故 CDO 債權群組金額總計爲 3.2 億元，本文將 CDO 分成四種分券商品，如表 1。此外 CDO 存續期間設定爲 5 年，發行機構半年付息一次，執行蒙地卡羅模擬 20,000 次。

表 1. 本研究擔保債權分券商品之假設

分券種類	起賠點(ϑ_{i-1})	止賠點(ϑ_i)	發行金額(千萬)
權益分券(Equity)	0	3%	9.6
初級順位(Junior)	3%	6%	9.6
次級順位(Mezzaniae)	6%	10%	12.8
先償順位(Senior)	10%	100%	288

本文應用 Merton(1974)模型，估計債權群組資產發生違約事件之可能性。利用公司 2006 年最後一個交易日資料，預測 2007 的違約機率，亦即透過公司當年度資料預測下一年度公司的違約機率，由台灣經濟新報資料庫(TEJ)取得使用結構式信用風險模型的相關資料，包括股價、流通在外的股數、流動負債與長期負債。

由台灣經濟新報獲得的公開資訊後，本文先衡量 Merton 模型不可觀察變數，分別爲標的資產之市值與波動率。依照 Newton-Raphson Method 求解(3)和(5)二條非線性方程式，可獲得每家企業的資產市值與其波動率，進一步衡量每家企業發生違約事件的機率，其結果摘要於表 2。

再者，爲了考量債權群組違約的傳染效應，本文透過 Copula 函數補捉資產違約之相關性，根據 CML 估計多元 Gaussian、Student-t 以及 Clayton Copula(註 6)函數的參數。再從參數估計後之各個 Copula 函數分別抽取一組隨機變數 $(u_1,u_2,\ldots,u_n)'$，代入下式 $t^* = F_i^{-1}\left(u_i\right) = \inf\left\{t \mid \hat{F}_i\left(t_i\right) \geq u_i\right\}$ 推導出群組資產發生違約的時點，再經由式(1)求算出各個分券之合理信用價差。

註5：CDS 的信用評等必須獲得信用評等機構 Fitch/Moody's/S&P 的等級爲 BBB-/Baa3/BBB-以上

註 6 ：本研究 Clayton Copula 參數之最佳估計值 α=1.54

表 2. 應用結構式信用風險模型所需之資料

	資產市值	資產波動	權益市值	權益波動	負債門檻值
亞泥	88,891,836,805	0.2442	78,492,000,000	0.2765	10,596,143,500
台塑	368,747,239,125	0.1204	309,452,000,000	0.1435	60,414,492,500
南亞	494,357,993,754	0.1425	413,928,900,000	0.1702	81,947,268,500
台化	365,700,706,158	0.1148	301,058,000,000	0.1394	65,862,898,000
中鋼	429,045,603,397	0.1706	382,433,800,000	0.1914	47,491,645,000
裕隆	66,219,541,376	0.2627	57,077,500,000	0.3048	9,314,606,000
國建	42,137,499,312	0.4418	38,750,400,000	0.4804	3,451,034,000
陽明	68,409,841,537	0.1298	43,033,200,000	0.2063	25,855,649,500
華航	167,186,803,312	0.0702	57,212,800,000	0.2053	112,049,866,000
萬海	57,483,251,270	0.1723	41,140,000,000	0.2407	16,651,745,500
中壽	20,761,039,333	0.3943	19,219,200,000	0.4259	1,570,943,000
台產物	6,499,162,990	0.2625	6,383,200,000	0.2673	118,151,900
台壽保	29,418,924,796	0.1412	20,457,400,000	0.2031	9,130,682,000
高雄銀	20,609,331,766	0.1348	9,531,850,000	0.2915	11,286,580,500
萬泰銀	58,512,508,864	0.0869	24,980,900,000	0.2036	34,164,549,500
聯邦銀	74,133,314,537	0.0397	16,717,050,000	0.1759	58,500,050,500
大眾銀	96,547,790,807	0.0632	20,695,500,000	0.2950	77,284,162,000
寶來證	86,299,288,832	0.1364	32,499,250,000	0.3621	54,816,201,000
元大證	163,626,359,942	0.2017	86,262,450,000	0.3826	78,824,790,000
群益證	63,979,702,338	0.0789	19,670,000,000	0.2567	45,146,091,000
聯電	431,836,733,041	0.2406	387,423,000,000	0.2682	45,252,084,000
台積電	1,683,784,021,094	0.2664	1,634,717,410,000	0.2744	49,992,789,500
仁寶	192,300,906,377	0.1567	110,709,550,000	0.2722	83,131,470,000
宏碁	215,461,000,000	0.2712	158,916,000,000	0.3677	57,612,595,500
億光	32,854,899,274	0.4041	29,664,000,000	0.4476	3,251,130,500
友達	576,220,074,859	0.1825	343,056,900,000	0.3065	237,564,353,500
中華電	636,371,365,239	0.1235	585,820,200,000	0.1342	51,505,366,000
欣興	57,832,297,195	0.3761	45,714,150,000	0.4758	12,346,924,000
鴻海	1,376,064,605,539	0.2908	1,201,560,000,000	0.3331	177,798,544,000
裕融	17,105,612,903	0.0456	4,841,000,000	0.1610	12,496,119,000
竹商銀	69,614,982,405	0.1340	29,296,800,000	0.3183	41,079,262,500
台哥大	190,130,742,369	0.1739	168,966,200,000	0.1957	21,564,043,000

註：表中的權益波動率，以 2006 整年度日報酬的標準差轉換年化後衡量之；負債門檻依照 KMV 模式，以流動負債加上 1/2 長期負債衡量之；無風險利率依照一年期的政府公債殖利率(1.85%)。根據後三欄由 TEJ 獲得的訊息，透過 New-Raphson 法解出 Merton 信用模型主要的參數，資產公平市值與波動率。

二、CDO 信用價差之模擬結果

權益分券是所有 CDO 發行的分券中最先承擔債權群組損失的部位，因此權益分券的信用價差高於其它等級的分券，表 3 陳列分別運用 Gaussian、Student-t 以及 Clayton 模擬債權群組分券的公平信用價差。由表 3 觀察得知無論使用何種 Copula 函數，權益分券的信用價差最高，而先償順位分券的信用價差則最低。在此假設違約回復率爲零。

表 3. 各個分券信用價差之模擬結果

分券類別	原始 Merton 模型			簡易的 Merton 模型		
	Gaussian	Student-t	Clayton	Gaussian	Student-t	Clayton
權益	4.4283%	4.2087%	1.7744%	17.9422%	17.1355%	7.8794%
初級順位	1.5447%	1.4386%	1.1343%	8.5143%	8.3871%	5.0655%
次級順位	0.5589%	0.5956%	0.7986%	4.7574%	4.7583%	3.8012%
先償順位	0.0128%	0.0171%	0.0897%	0.2083%	0.2274%	0.5279%

不同 Copula 函數對傳染效果之效應強弱不同。由表 3 模擬結果得知，權益分券以使用 Gaussian Copula 模擬的信用價差最高，次之爲 Student-t Copula，Clayton Copula 模擬最低；而次級、先償順位分券模擬的信用價差，則以 Clayton Copula 最高，Gaussian Copula 最低，主要原因爲 Clayton 與 Student-t Copula 函數模擬較能捕捉下方風險，尤其 Clayton Copula，考量波動具有群聚效應下低估債權損失的可能性大幅降低。

債權群組違約相關性較大時，其損失發生會較容易有群聚現象，所有資產同時違約或同時存活之機率提高。雖然發生信用違約事件，可能產生連鎖違約之極端損失，然而相對地發生零損失的機率亦將大幅上升，權益分券的期望損失得以降低，對應之信用價差亦可降低。反之，若債權群組違約相關性較低時，其發生零損失的可能性相對變低，則權益分券的期望損失將會大幅提高，故權益分券之信用價差與債權違約相關性呈負向走勢，可解釋 Gaussian Copula 模擬權益分券之信用價差高於 Student-t 以及 Clayton Copula 之原因。觀察次級、先償順位分券模擬結果可知，債權群組之傳染效果越強烈，發生同時違約的可能性越高，則增加連鎖違約而產生的極端損失值，造成次級、先償順位分券的持有人暴露於可能發生大量損失之風險下，期望損失率相對提高，故需對應較高的信用價差作爲風險補償，亦即次級、先償順位分券之信用價差與債權違約相關性呈正相關。

黃裕烈(2007)與陶亞蘭(2008)文中提及，Merton 模型假定資產報酬率服從常態分配下，其評估違約機率表現則有低估的情況，因此本文使用 Bharath and Shumway (2008)的簡易 Merton 模型，再比照上述的模擬方式，將各個分券信用價差之結果陳列在表 3。經由特殊轉換方式衡量出的違約可能性相對變高，比較表 3 的原始 Merton 模型，數據反應出各個分券信用價差呈現上升之趨勢，而不同的 Copula 函數對信用價差的影響一致於上述的結果。

本文亦探討不同違約回復率對各個分券的信用價差的影響。研究發現權益分券對違約回復率相對先償順位分券較爲敏感；直覺上違約回復率越低，分券的信用價差則越高，但由圖 2 觀察之，除次級順位分券外，權益、初級順位與先償順位的分券符合違約回復率增

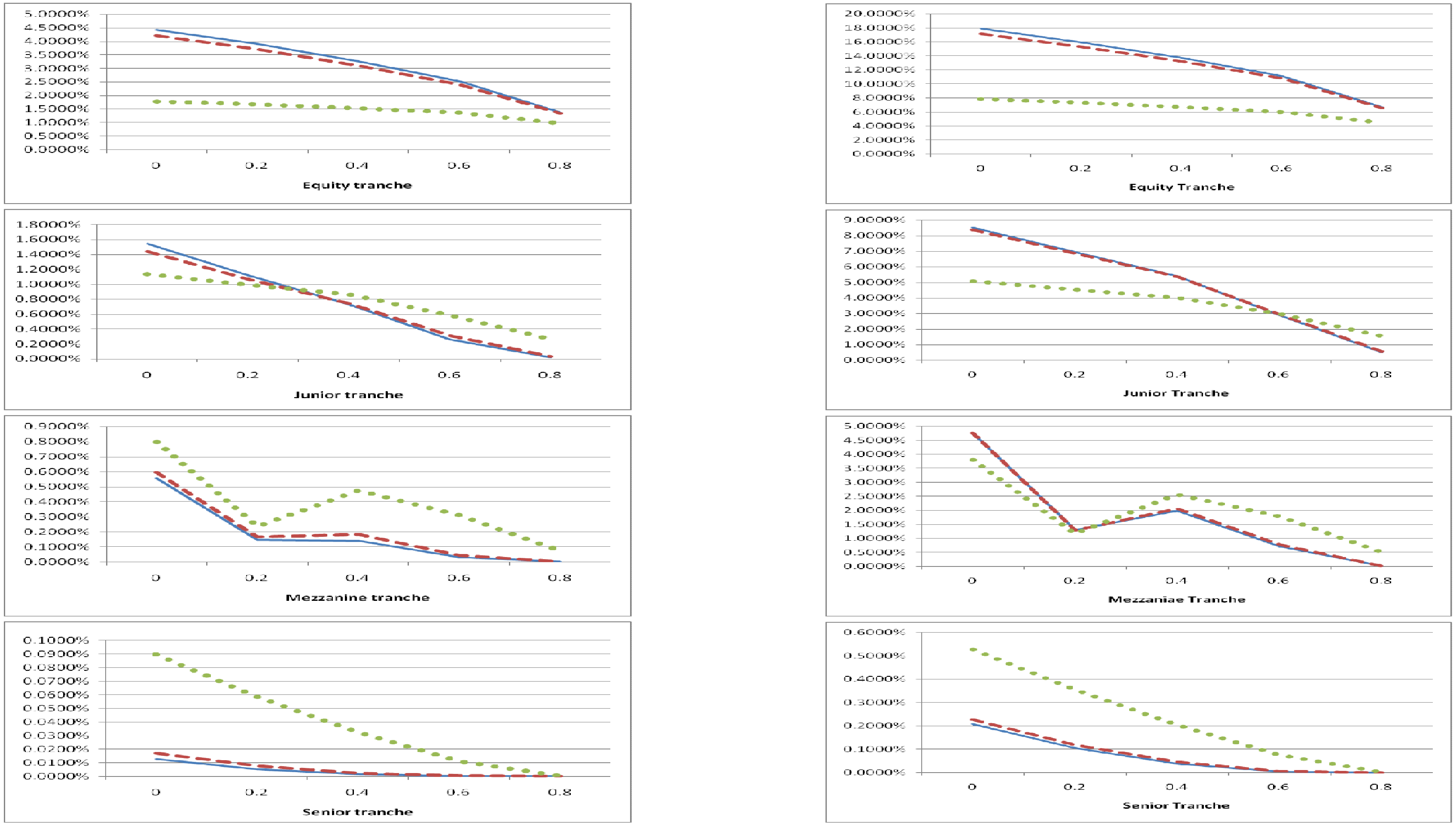

圖 2. 信用價差對違約回復率之趨勢圖

註：圖中左區爲原始 Merton 模型；右區的圖爲簡易的 Merton 模型，水平軸爲違約回復率，垂直軸爲各個分劵的信用價差。▬▬ Gaussian Copula；▪▪▪▪ Student-t Copula；●●●● Clayton Copula。

加，其信用價差呈現遞減的結果。對次級順位分券而言，信用價差在違約回復率為 0.4 反轉上升再下降的現象與 Galiani(2003)的結果一致。由於次級順位分券屬於一個灰色地帶，同時受到權益分券與先償順位分券的效應影響。從次級順位分券圖中觀察得知，在違約回復率 0.2 前，信用價差對違約回復率的敏感程度，相對違約回復率在 0.4 後強烈，特別是 Clayton Copula，表示違約回復率為影響次級順位分券信用價差高低的重要因素之一。

最後，本文採納 Gibson(2004)風險衡量指標作為兩個信用風險模型的比較基準，可以額外探討各個分券在 CDO 存續期間內之風險特徵，提供一避險的策略。

三、CDO 損失槓桿倍數之分析

表 4 陳述求算預期損失及非預期損失槓桿倍數之結果。觀察表 4 得知，無論何種信用風險模型以及槓桿乘數，在相同 Copula 函數下，風險較高的權益分券，其槓桿倍數最大，而先償順位分券則最低，顯示出「高風險，高報酬」之特性。表 4 的 Panel 顯示，在同一分券下探討不同 Copula 函數對槓桿倍數的影響，對權益與初級順位分券而言，利用 Gaussian Copula 的槓桿倍數最高，次之為 Student-t Copula，而 Clayton Copula 則最低；反觀先償順位的分券，槓桿倍數以 Clayton 最大，最小為 Gaussian Copula，其結果一致於信用價差的結論。

表 4. 各個分券之槓桿倍數與損失率

Panel A: 原始 Merton 模型								
Copula 函數	權益分券		初級順位分券		次級順位分券		先償順位分券	
	EL	UL	EL	UL	EL	UL	EL	UL
Gaussian	19.96	17.02	7.35	9.22	2.70	5.08	0.06	0.23
	(19.49%)	(57.45%)	(7.18%)	(31.13%)	(2.64%)	(17.16%)	(0.06%)	(0.79%)
Student-t	19.39	16.15	6.97	8.62	2.93	5.20	0.08	0.28
	(18.61%)	(55.91%)	(6.69%)	(29.85%)	(2.81%)	(17.99%)	(0.08%)	(0.95%)
Clayton	8.56	6.33	5.54	4.88	3.93	4.04	0.45	0.68
	(8.17%)	(34.46%)	(5.28%)	(26.58%)	(3.75%)	(22.02%)	(0.43%)	(3.72%)
Panel B: 簡易的 Merton 模型								
Gaussian	12.51	9.94	7.51	7.57	4.62	5.69	0.22	0.41
	(56.04%)	(102.62%)	(33.67%)	(78.15%)	(20.69%)	(58.69%)	(0.99%)	(4.27%)
Student-t	12.10	9.55	7.39	7.33	4.59	5.54	0.24	0.44
	(54.48%)	(101.27%)	(33.28%)	(77.67%)	(20.66%)	(58.75%)	(1.08%)	(4.67%)
Clayton	6.74	5.09	4.72	4.13	3.68	3.60	0.55	0.73
	(30.36%)	(74.35%)	(21.25%)	(60.30%)	(16.58%)	(52.61%)	(2.48%)	(10.66%)

註：表中 EL(Expected Loss)欄位為各個分券的預期損失結果；UL(Unexpected Loss)欄位則為非預期損失結果；(.)為各個分券的損失率。

再者，本文比較簡易 Merton 模型與原始 Merton 模型計算出的槓桿倍數，解釋簡易 Merton 模型減少違約機率低估可能性之現象。對照表 4 的 Panel A 與 B，無論預期損失槓桿倍數或非預期損失槓桿倍數，以權益分券而言，簡易 Merton 模型估算的槓桿倍數相對原始 Merton 模型低，反觀次級、先償順位分券的數值則相對較高；此外利用簡易 Merton 模型，各個分券非預期損失率相對預期損失率的增加幅度低於原始 Merton 模型，隱含簡易 Merton 模型能捕捉到極端違約的情境，說明預估已實現損失較爲精確，顯示簡易 Merton 模型下擔保債權憑證的評價精確度大幅提高。

最後，探討 CDO 存續期間內槓桿倍數的變化(註 7)。由表 5 的 Panel A，在 CDO 存續期間內，當債權群組發生違約事件時，權益分券率先吸收損失，造成權益分券的槓桿倍數隨時間遞減，此歸咎於已實現的損失降低發生損失的不確定性；但由於權益分券承擔的損失有限，對次級與先償順位的分券而言，隨時間經過，所受到的保護縮水，導致分券對於發生損失的不確定性大幅提高，故其槓桿倍數隨時間增加而呈現上升的現象，這個現象提供一避險訊息。若大部份違約發生在存續期間之前期，權益分券的投資者在未賺取相當的信用價差，本金可能已化爲烏有，但違約發生頻率在後期較高，則之前所獲得的信用價差也許可以彌補權益分券的部份損失，因此對於權益分券的持有人，應在存續期間之前期採取規避風險暴露的策略，同理推論先償順位分券的投資者，則需規避風險於存續期間後期的違約可能性，此結果江彌修、岳夢蘭與林恩平(2009) 一致。

表 5 的 Panel B 顯示權益分券的非預期損失槓桿倍數變低，且隨時間經過而遞減；先償順位分券的非預期損失槓桿倍數變高，同樣隨時間經過逐漸上升。權益分券的損失率相對增加的幅度低於其它分券，並且各個分券彼此之間的非預期槓桿倍數差異縮小，說明非預期的極端事件發生時，即使爲先償順位的分券也可能遭受重大的損失。

伍、結論

金融全球化造成衍生性商品市場的蓬勃，其中以信用衍生性商品的交易量成長最爲快速。擔保債權憑證屬於不動產證券化之一，透過特殊目的機構將違約風險移轉給投資大眾，但其背後隱含的乘數效應卻往往被忽略，Hull(2008)文中提及投資者通常盲從商品之信用評等等級，缺乏對商品的熟悉。本文主要探討透過 Bharath and Shumway (2008)的簡易 Merton 模型納入 CDO 的信用價差評價，搭配 Copula 函數估算債權群組之間的違約相關性，希望改善違約機率低估的問題，有助評價各分券信用價差之精確度；此外，參照 Gibson (2004)的風險衡量指標，分析 CDO 背後隱含的損失槓桿倍數，了解各個分券面臨風險的敏感程度，提供一避險的訊息。由於權益分券爲 CDO 率先吸收違約損失之分券，而債權違約相關性之強弱影響標的物同時存活或違約之可能性，因此權益分券的信用價差與違約相關性呈現反向。相對考量波動群聚現象與極端事件發生的 Student-t 及 Clayton Copula，權益分券則以利用 Gaussian Copula 模擬的信用價差最高；但權益分券承受的損失有限，加上次級、先償順位分券對損失的不確定性較爲敏感，因此其信用價差與違約相關性屬於同向趨勢，其分券信用價差以 Clayton Copula 模擬爲最高。

註 7：由於篇幅限制未列出原始 Merton 模型下槓桿倍數對 CDO 存續期間的敏感分析，但其結果類似於簡易 Merton 模型求算的型態。

表 5. 簡易的 Merton 模型下槓桿倍數對 CDO 存續期間的敏感度

Panel A: 預期損失槓桿倍數												
付息時點	權益分券			初級順位分券			次級順位分券			先償順位分券		
	Gaussian	Student-t	Clayton	Gaussian	Student-t	Clayton	Gaussian	Student-t	Clayton	Gaussian	Student-t	Clayton
0.5	31.392	30.562	26.975	1.886	2.158	3.871	0.038	0.401	1.312	0.000	0.002	0.024
1	27.061	25.566	17.993	4.816	5.300	6.421	0.935	1.393	3.057	0.005	0.018	0.158
1.5	23.153	22.380	13.736	6.518	6.494	6.512	2.026	2.284	3.764	0.028	0.043	0.263
2	20.266	19.715	11.310	7.462	7.270	6.196	2.745	2.945	4.063	0.058	0.074	0.340
2.5	18.355	17.796	10.046	7.795	7.660	5.883	3.238	3.458	4.035	0.087	0.100	0.392
3	16.640	16.133	8.935	7.899	7.812	5.579	3.777	3.855	3.984	0.114	0.130	0.440
3.5	15.357	14.851	8.203	7.863	7.757	5.323	4.085	4.138	3.911	0.143	0.161	0.475
4	14.237	13.768	7.641	7.746	7.652	5.079	4.334	4.401	3.820	0.171	0.187	0.505
4.5	13.268	12.894	7.161	7.690	7.521	4.913	4.511	4.498	3.744	0.195	0.214	0.529
5	12.507	12.098	6.740	7.514	7.391	4.719	4.617	4.589	3.682	0.220	0.239	0.552
Panel B: 非預期損失槓桿倍數												
0.5	31.138	29.568	24.195	4.206	4.918	7.486	0.243	2.759	4.603	0.000	0.038	0.125
1	25.285	23.186	14.216	8.621	8.767	7.659	3.352	4.119	5.044	0.065	0.117	0.396
1.5	20.627	19.549	10.512	9.403	9.091	6.687	4.676	4.897	4.853	0.131	0.178	0.513
2	17.517	16.752	8.630	9.485	9.078	5.987	5.139	5.236	4.665	0.199	0.240	0.573
2.5	15.522	14.912	7.620	9.245	8.946	5.507	5.372	5.483	4.407	0.249	0.273	0.615
3	13.861	13.335	6.795	8.904	8.659	5.112	5.643	5.606	4.198	0.286	0.312	0.647
3.5	12.611	12.098	6.223	8.551	8.285	4.799	5.720	5.639	4.014	0.322	0.351	0.673
4	11.549	11.106	5.776	8.180	7.950	4.527	5.751	5.687	3.847	0.355	0.381	0.696
4.5	10.679	10.274	5.408	7.906	7.621	4.327	5.745	5.610	3.713	0.383	0.413	0.714
5	9.942	9.553	5.088	7.572	7.326	4.127	5.686	5.542	3.600	0.414	0.441	0.730

透過槓桿倍數的分析，權益分券的槓桿倍數相對較高，顯示高風險高報酬之特性，雖然已實現損失對權益分券的持有人造成損害，卻同時降低發生損失之不確定性，因此權益分券的槓桿倍數隨時間經過逐漸下降，亦即權益分券對非預期損失的發生較不敏感，故非預期損失槓桿倍數相對變低；反觀次級、先償順位分券，對分券的損失不確性大幅提高，其槓桿倍數隨時間經過而上升，導致非預期損失槓桿倍數相對變高。權益分券在存續期間前期之面臨風險較高，對次級、先償順位分券的保護層縮水，所以受償順位較高的分券對存續期間後期的風險較爲敏感。

本文利用簡易 Merton 的信用風險模型，較能捕捉極端違約事件，因此其非預期損失率相對預期損失率的增加幅度較低，顯示已實現損失的估算較爲精確，亦即降低違約機率的低估可能性，因此 CDO 各個分券估算出的信用價差較爲適當，本文研究 CDO 的評價模型提供一較爲精確的初步評價基礎。

參考文獻

江彌修、岳夢蘭與林恩平(2009)，「條件獨立假設下合成型擔保債權憑證之評價與避險」，*財務金融學刊*，第十七卷第一期。

連惟志(2006)，不完全資訊信用模型下債權擔保證券之評價-Copula 方法，國立中山大學財務管理研究所碩士論文。

陳業寧、王衍智與許鴻英(2004)，「台灣企業財務危機之預測：信用評分法與選擇權評價法孰優？」，*風險管理學報*，第六卷第二期，155-179。

陶亞蘭(2008)，擔保債權憑證隱含違約相關性之研究-以台灣爲例，國立台灣大學財務金融學系碩士論文。

黃裕烈(2007)，「擔保債權憑證之評價-Copula 函數的應用」，*經濟論文*，第三十五卷第一期，21-52。

廖四郎、李福慶(2005)，「擔保債權憑證之評價-Copula 分析法」，*台灣金融財務季刊*，第六輯第二期，53-84。

盧琬靖(2007)，擔保債權憑證之評價-探討批次證券之槓桿效果，國立台灣大學財務金融學系碩士論文。

Bharath, S. T., and Tyler Shumway (2008), "Forecasting Default with the Merton Distance to Default Model," *Review of Financial Studies*, Vol. 21, No. 3, 1339-1369.

Galiani, Stefano S. (2003), "Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products," *Working Paper*, King's College London.

Gibson, Michael S. (2004), "Understanding the Risk of Synthetic CDOs," *FEDS Discussion Papers, no. 2004-36, Board of Governors of the Federal Reserve System*.

Giesecke, Kay, and Lisa Goldberg (2004), "Sequential Defaults and Incomplete Information," *Journal of Risk*, Vol. 7, No. 1, 1-26.

Hull, John C. (2008), "The Credit Crunch of 2007: What Went Wrong? Why? What Lessons Can Be Learned," *Working Paper*, University of Toronto.

Li, D. X. (2002), "Valuing Synthetic CDO Tranches Using Copula Function Approach," *RiskMetrics Group Working Paper*.

Lin, Shu-Ying, and Gang Shyy (2008), "Credit Spreads, Default Correlations and CDO Tranching: New Evidence from CDS Quotes," *Working paper.*

Menguzzo, Davide, and Walter Vecchiato (2004), "Copula Sensitivity in Collateralized Debt Obligations and Basket Default Swaps," *Journal of Futures Markets*, Vol. 24, No. 1, 37-70.

Merton, R. C. (1974), "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, 449-470.