

# 台灣交易所交易基金之報酬與風險分析 The Return-risk Analysis of the ETFs in Taiwan

劉任昌 (Jen-Chang Liu)  
德明財經科技大學財金系  
Department of Banking and Finance,  
Takming University of Science and Technology

葉馬可 (Mark Yeats)  
德明財經科技大學應用外語系  
Department of Applied Foreign Languages,  
Takming University of Science and Technology

簡靜裕 (Ching-Yu Chien)  
德明財經科技大學財金系  
Department of Banking and Finance,  
Takming University of Science and Technology

## 摘要

最新的美國基金市場統計顯示，標普 500 交易所交易基金 (ETF) 的資產規模最高，其次是先鋒 500 指數型基金。有鑑於此，本研究回顧基金市場發展之歷史，闡述指數型基金與 ETF 之區別，然後針對台灣最早發行的七檔 ETF 進行分析。研究發現：富邦科技的累積報酬最高，台灣 50 次之，元大電子第三；就夏普指數進行比較，台灣 50 最高，富邦科技次之，元大電子第三。打敗股價報酬指數者，僅有台灣 50 與富邦科技。此外，台灣 50 對市場報酬指數的追蹤效果最佳；透過七檔 ETF 建構投資效率前緣，發現市場報酬指數位置偏離效率前緣，台灣 50 與富邦科技則呈現較高的投資效率性。

**關鍵詞：**指數型基金、交易所交易基金、台灣 50、效率前緣

## Abstract

According to the latest statistics for the U.S. market, iShare SPDY is the largest mutual fund and Vanguard 500 Index is the second in terms of net assets. In face of this trend, this article reviews the history of mutual fund markets, illustrates the difference between index funds and ETFs, and analyzes the seven earliest ETFs in Taiwan. Fubon Technology achieved the greatest cumulative return, followed by Taiwan 50 and Yuanta Electronic. In terms of Sharpe ratios, the Taiwan 50 ranks first, Fubon Technology is second, and Yuanta Electronic comes third. Only Taiwan 50 and Fubon Technology beat the market return index. Moreover, among the seven EFTs, the Taiwan 50 is the most effective at tracking the market return index. After constructing the portfolio frontier based on the seven ETFs, we found the market return index deviates from the portfolio frontier substantially, and only the Taiwan 50 and Fubon Technology outperform the market return index.

**Keywords:** index fund, ETF, Taiwan 50, Portfolio frontier

## 壹、前言

ETF (Exchange Traded Funds) 的直譯名稱是「交易所交易基金」，這是中國大陸的稱呼；台灣則普遍稱之為「指數股票型基金」，而傳達英文的“equity index funds”意義 (李存修、尤亭歡，2015)。本研究將說明，無論就市場發展歷史或實質運作，「指數型基金」與「交易所交易基金」不完全相同，尤其是藉由回顧指數型投資策略的發展背景，闡述當前市場的 ETF 受歡迎因素；然後，本研究分析台灣在 2008 年以前上市的七檔 ETF 報酬績效與特色。

如果在 1925 年底投資 \$1 美元在標準普爾 500 (S&P 500) 指數成分股，再持續複製它的成分股內容與比率，到 2014 年底的累積財富是 \$27,419.32 美元，年化報酬是 12.16% (即 27,419.32 的 89 次開方，再減 1)；歷年的最大虧損發生在 1931 年的 -43.9%，最大獲利是 1933 年的 52.9%；近十年的最大虧損發生在 2008 年的 -37%，最大獲利是 2013 年的 32.39% (次高是 2009 年的 26.5%)。以上數字說明股市跌深反彈的規律，以致於 S&P 500 的平均年報酬率仍高達 12.1%，標準差則為 20.1% (參考：Ross, Westerfield, Jaffe, and Jordan (2016) 第 10 章；劉任昌，2015a)。

但是，跌深反彈或漲多拉回的規則，僅適用在市場指數 (例如 S&P 500)，絕對不能套用在個別股票；跟隨市場趨勢投資才得以確保獲利，得以避免太早出脫強勢股，也得以避免太遲停損弱勢股。例如，蘋果 (Apple) 在 1982 年 11 月 30 日被納入 S&P 500 成分股，微軟 (Microsoft) 在 1994 年 6 月 1 日納入；所以，跟隨 S&P 500 調整投資的策略可及時把握 Apple 與 Microsoft 的成長契機，也及時根據被剔除的名單，淘汰弱勢股，更可以長期持有 Apple 與 Microsoft 等的績優股 (劉任昌，2015a)。如此跟隨市場指標股投資，可以掌握市場趨勢，是效率市場假說 (Efficient Market Hypothesis) 的典型應用 (Fama, 1970)。

基於 S&P 500 的優異表現，自然出現利用股市指數成分股比重，當作投資組合依據的共同基金 (mutual funds)，即所謂的指數型基金 (index fund)。全球第一檔的指數型基金在 1975 年創立，發行公司是先鋒 (Vanguard) 集團；先鋒創辦人柏格 (Bogle) 在《買對基金賺大錢》書中，如此闡述：「指數型基金是唯一保證分享獲得企業經營利益的投資工具，透過再投資的複利效果，累積的財富驚人。」(註<sup>1</sup>) 也就是說，經濟體的成長、生產與創新，主要是透過公司組織進行，因而為股東創造財富；依照公司市場價值比例，投資在他們的股票，這是穩贏、穩定坐享經濟發展果實的遊戲。

雖然，指數型基金具有跟隨市場長期趨勢的優點，但卻和其他共同基金相同的，無法避免短期的市場價格時機 (market timing) 與延時交易 (late trading) 的問題 (Saunders and Cornett, 2018, p.135)。亦即，共同基金的淨值計算基準時間點 (成分股的收盤價)，往往和基準時間點前、後的價值不同。因為在基準時間點之前，投資組合的成分資產價格波動；在基準時間點之後，重要新資訊對基金價格的影響，卻要在下一個交易日才反應。

---

註<sup>1</sup>:原文：“The index fund is indeed the only investment that guarantees you will capture your fair share of the returns that business earns. Thanks to the miracle of compounding, accumulations of wealth over the years generated by those returns have been little short of fantastic.”(Bogle, 2007, p. xii) 中譯本書名是《買對基金賺大錢》，劉真如 (2008) 翻譯。

指數型基金的另一個缺點是投資人無法進行信用交易，即投資人無法融資買入（buying on margin），也不能融券放空（short sell）；因此，就市場流動性與價格效率性而言，指數型基金遠不如上市交易的大型股票。

基於以上的缺點，指數型基金是必須要再進化，而在 1993 年出現以 S&P 500 成分股為標的交易所交易基金（Exchange-Traded Funds, ETF），它的全名是標準普爾 500 存託憑證（Standard & Poor's Depository Receipts），縮寫為 SPDR，在美國股票交易所（American Stock Exchange）交易的代號是 SPY。存託憑證機制允許投資人在受益憑證與成分股間，進行完全的交換與贖回，藉以消除兩者之間的可能套利機會，促成 ETF 的價格充分反映投資組合成分股即時價值。因此，投資人可以在 ETF 成分股交易時段，同步交易 ETF，而且可以從事融資與融券交易。

當全球第一檔 ETF SPDR 開始於 1993 年 1 月 29 日上市交易，當天收盤價是 \$43.9，對映的 S&P 500 指數是 439 點；在 2017 年 11 月 30 日，S&P 500 指數收盤 2,67.58 點，SPY 則是每股 \$265.01 美元。也就是說，SPY 的每股價格相當於指數的 10 倍，讓投資人容易掌握投資部位的價值。不僅如此，SPY 定時發放 \$1 美元左右的季股利，除息日約略落在 3、6、9 與 12 月的 20 日。SPY 投資人不僅獲得資本利得，也享受穩定之配息。目前，SPY 成分包含：蘋果（Apple）3.86%、微軟（Microsoft）2.82%、亞馬遜（Amazon）2.03%、臉書（FaceBook）1.85%，也包含嬌生（J&J）、奇異（GE）、寶僑（P&G）與輝瑞（Pfizer）等權值超過 1% 的傳統產業。

在 SPDR 廣受投資人歡迎後，華爾街也在 1998 年初推出道瓊工業平均指數的 ETF（代號 DIA），然後在 1999 年初推出那斯達克 100 指數的 ETF（代號 QQQ）。QQQ 發放季股利的時點與 SPY 相當，但 DIA 是在每月 20 日左右除息。道瓊工業平均指數在 2017 年 11 月 30 日的收盤 24,272.35 點，DIA 是每股 \$242.84。因此，DIA 投資人不僅可以從每天的財金新聞報導中，清楚知道自己的投資部位價值；它特有的每月除息一次的特性，更可以讓投資人享受到坐領第二份月薪的感覺（劉任昌，2015a）。

不同於眾多月配息基金來源可能是出售資產淨部位以換取現金，而且可能是在資產之利息與股利收入不足，在虧損情況下出售投資標的變現；相對的，股票 ETF 嚴守匯集股息再發放給受益人的紀律。例如，DIA 的 30 支成分股中，除了麥當勞是發放年股利外（與台灣上市股票相同），其他 29 支股票都是發放季股利，因此，DIA 每年收取 117 次的股息，平均每月收取 9.75 次股息，得以再彙總發給 DIA 受益人。若景氣下滑，則配合道瓊成分股公司之政策，減少發放股息，不存在投資「本金」被侵蝕，或被低價賣出之疑慮（劉任昌，2015a）。

台灣首檔 ETF 台灣 50（代號 0050）在 2003 年 6 月 30 日上市交易。第二檔 ETF 台灣中型 100（代號 0051）則在 2006 年 8 月 31 日上市交易；中 100 的主要候選成分股是市場價值排行第 51 到第 150 的上市交易股票，理論上，此類公司成長性較高，股性較為活潑，讓投資人更有機會賺取資本利得，所謂「代表臺灣市場具成長潛力之中型企業績效，提供投資人參與中型股表現之機會。」（註<sup>2</sup>）因此，台灣 50 是大型市值股的代

---

註<sup>2</sup>：參考台灣證券交易所「台灣中型 100 指數」說明  
（<http://www.taiwanindex.com.tw/index/index/TWMC>）。

表，台灣中 100 是表彰成長股的特性。

台灣市場發行的第三至六檔 ETF 分別是富邦科技 (0052)、元大電子 (0053)、台商 50 (0054) 與 MSCI 金融 (0055)；值得特別一提的是在 2007 年 12 月 26 日上市的第七檔 ETF 台灣高股息 (0056)，台灣證券交易所與元大寶來投信網頁說明 (註<sup>3</sup>)：台灣高股息成分股是基於「獲利」概念來篩選成分股，先將台灣 50 指數與台灣中 100 指數共 150 支成分股作為採樣母體，依據「未來一年預測現金股利殖利率」排序後，選取排序最高的 30 支股票作為成分股，以衡量長期穩定配息公司的績效表現，表彰長期穩定配息公司之績效表現。因此，台灣高股息則是表彰價值股的特性。

本研究利用台灣證券交易所最早流通的七檔 ETF 作為分析標的，也藉由建構七檔 ETF 的報酬風險空間 (return risk space) 形成的投資效率前緣 (Markowitz, 1952)，闡述投資學的啟示。本研究編排如下，第貳節是文獻回顧與建立研究假說，第參節是分析結果，第肆節是結論。附錄是 2017 年 11 月的美國基金市場資訊。

## 貳、文獻回顧與研究假說

根據金融機構管理教科書 Saunders and Cornett (2018, p. 114)的內容，歷史上的第一個共同基金在 1924 年出現於美國波士頓。但根據 Eton and Gruber (2013, p.1012)，歷史上的第一個共同基金出現在 1774 年的荷蘭，美國則是在 1824 年出現共同基金。至今，美國金融市場的共同基金資產規模，僅次於商業銀行，但大於保險公司的總資產。

雖然，共同基金的操作目標是打敗市場，但實際的績效表現打敗市場標竿指數 (benchmark index) 報酬者，卻不及半數 (Bogle, 2007；Bodie, Kane, Marcus, and Jain, 2014)。以上事實導致指數型基金的出現，學術圈也開始將共同基金區分為主動式管理 (active management) 與被動式管理 (passive management)，並且比較二者的投資績效。愈來愈多實證研究顯示，大部分的主動式基金無法穩定地優於標竿指數 (Bodie et al., 2014, p. 382)。這個事實反映在先鋒 S&P500 基金的資產規模，已經遠超過曾經由彼得林區 (Peter Lynch) 管理的富達麥哲倫 (Fidelity Magellan) 基金 (註<sup>4</sup>)。

台灣的股票型共同基金報酬率優於大盤的比例，也是明顯偏低；這個事實導致被動式基更受投資人重視，也導致學術界重視被動式基金的追蹤誤差 (Tracking errors) 議題；亦即，指數型基金能否成功貼近標竿指數 (benchmark) 指數，是評定指數型基金的標準 (Roll, 1992)。例如，李存修與尤亭歡 (2015) 分析兩岸三地 30 檔 ETF (樣本期間 2009 至 2013 年)，發現總費用率、匯率、資產規模、成交量、複製指數策略與區域別的分追蹤績效等因子皆顯著影響 ETF 追蹤誤差的大小。

在傳統的主動式基金社群，則將注意力轉移到增長型指數 (enhanced index) 基金的研究趨勢 (李建興、彭琪祿、施仁貴，2005；Jorion, 2003)，被稱作基金業的第三波風潮

註<sup>3</sup>: 參考台灣證券交易所在 2006 年 12 月 26 日發布之新聞稿：「臺灣證券交易所與 FTSE 合作編製『臺灣發達指數』與『臺灣高股息指數』」(<http://www.tse.com.tw/zh/news/newsDetail/?id=361>)。

註<sup>4</sup>: 附錄 1 條列資產淨值前 25 大的基金資訊，資產規模介於 \$2,528.7 與 \$654.5 億美元，而麥哲倫基金的規模僅 \$169.3 億，參考富達公司網頁 (<https://fundresearch.fidelity.com/mutual-funds/ratings/316184100>)。

(the third wave) 或是稱為被動式殺手 (註<sup>5</sup>)。這股新興交易策略是利用重要指數 (通常是 S&P 500) 成分當作核心持股架構，如此地大幅減低操作成本，然後再試圖微幅超越指數的績效。為了達成這種操作目標，ETF 即成為主動式基金經理人的核心選擇。因此，了解以台灣市場 ETF 的特性，不僅個別投資人關心，也受到機構投資人重視。

吳明哲、邱國欽、黃佩柔與許寶文 (2011) 針對 11 檔 (0050 至 0060, 期間 2003/06/30-2010/05/17) 以台灣股市為投資標的 ETF 研究，發現：台灣 50 表現最佳，其次是中 100，第三是新台灣 (0060, 在 2008 年 8 月 18 日上市)；而且，針對台灣 50、中 100、元大 MSCI 金融與新台灣四檔 ETF，進行 ETF 上市交易日對於成分股之影響，發現前三者的成分股具有超額報酬現象，新台灣則不存在此現象。

若僅針對最早上市的三檔 ETF 研究，典型代表是林容竹 (2007) 的 2006 年 9 月 12 日 (富邦科技上市日) 至 2007 年 7 月 31 日之研究期間，發現中 100 的報酬率最高，台灣 50 居次，而且僅有中 100 打敗大盤指數。林容竹 (2007) 的研究重點是訂價效率，發現三者皆相對於淨值折價；富邦科技顯著折價，台灣 50 則呈現訂價效率性，僅輕微折價。林靖中、江明憲、詹司如、林昭賢 (2006) 研究台灣 50 上市前後三個月 (2003/04/01-09/30) 的成分股流動性變化，發現成份股流動性顯著增加；在控制市場成交量、產業因素與市值規模等因素後，研究結論台灣 50 的上市沒有造成資金排擠效益，卻是吸引新投資人參與股市交易。

美國市場的 SPDR 或台股的台灣 50 特徵是市場代表性；在另一方面，無論是基金業界或學術界，對於成長股與價值股的論戰從未停歇。最常用於區隔價值 vs 成長股的指標是：淨值市價比 (book-to-market)、盈餘價格比 (earnings to price) 與現金流價格比 (Lakonishok, Shleifer, and Vishny, 1994; Fama and French, 1998)。晚近，學者也證明投資人的特性的確會表現成長 vs 成長的偏好區別 (Cronqvist, Siegel, and Yu, 2015)。因此，本研究將說明，台灣中 100 基金是否確實表現出成長績效？台灣高股息基金是否表現出價值績效？

基於樣本期間的一致性，也為取得充分的研究期間，本研究僅針對在 2007 年底之前上市的七檔 ETF 進行研究分析，選取的期間是 2008 年初 (2007 年 12 月 31 日) 至 2017 年 11 月 30 日的 119 筆月報酬資料。首先，定義報酬率變數如下：

$$R_{it}, i = 0, 1, \dots, 6; t = 1, 2, \dots, 119.$$

代表 ETF 005*i* 在第 *t* 月 (自 2008 年 1 月至 2017 年 11 月) 的報酬率；

$$R_{mt}, t = 1, 2, \dots, 119.$$

代表發行量加權股價報酬指數 (以下簡稱「報酬指數」) 在第 *t* 月的報酬率。然後定義平均月報酬率：

$$\bar{R}_j = \frac{1}{119} \sum_{t=1}^{119} R_{jt}, j = 0, 1, \dots, 6, m.$$

再定義月報酬變異數：

註<sup>5</sup>: 關於被動式殺手 (passive killer) 與基金業第三波風潮，參考 CNBC 在 2017 年 2 月 13 日的報導，標題「主動式基金管理人羞愧地自稱 closet indexers」(Active managers named and shamed as 'closet indexers')，見網頁 (<https://www.cnbc.com/2017/02/13/active-managers-named-and-shamed-as-closet-indexers.html>)。

$$s_i^2 = \frac{1}{118} \sum_{t=1}^{119} (R_{jt} - \bar{R}_j)^2, j = 0, 1, \dots, 6, m$$

台灣 50 具有高市場價值比重特性，過去的研究發現它的報酬績效大於其他 ETF (吳明哲等, 2011; 劉任昌, 2015a); 其次，共同基金被依照價值型 (growth) 與成長型 (value) 指標，再搭配市值規模指標，形成九宮格的屬性呈現 (Bodie et al., 2014, p. 115; Fama and French, 1998)。本研究首先檢定市值規模因素對 ETF 績效的影響，稱之為市值規模績效假說：

**假說 1：**台灣 50 (0050) 的報酬績效高於其他六檔 ETF (0051 至 0057)。試圖檢定的對立假說是：

$$\bar{R}_0 > \bar{R}_i, i = 1, 2, \dots, 6. \quad (1)$$

描述基金屬性九宮格的二個維度是市值規模與成長型 (價值型) 屬性。成長型相對於價值型股票的量化指標，包含股票價格與每股盈餘、淨值、營業額、現金流量或股利等的公司基本面比率 (Bodie et al., 2014, p. 114)。中 100 ETF 是「代表臺灣市場具成長潛力之中型企業績效，提供投資人參與中型股表現之機會。」(註 2) 因此，台灣中 100 是表彰成長股的特性。本研究檢定的第二個假說稱為成長績效假說：

**假說 2：**台灣中 100 (0051) 的報酬績效高於其他六檔 ETF。試圖檢定的對立假說是：

$$\bar{R}_1 > \bar{R}_i, i = 0, 2, \dots, 6. \quad (2)$$

股價對股利的比率是價值型股票的指標之一。台灣高股息 ETF 是依據「未來一年預測現金股利殖利率」排序後，選取排序最高的 30 支股票作為成分股，以衡量長期穩定配息公司的績效表現，表彰長期穩定配息公司之績效表現 (註 3)。本研究試圖檢定台灣高股息標榜的「穩定配息價值績效」，第三個假說稱為價值績效假說：

**假說 3：**台灣高股息 (0056) 的報酬績效高於其他六檔 ETF。試圖檢定的對立假說是：

$$\bar{R}_6 > \bar{R}_i, i = 0, 1, \dots, 5. \quad (3)$$

除了分析七檔 ETF，本研究也分析發行量加權報酬指數，尤其是報酬指數與各檔 ETF 的關係 (註 6)。因為指數型基金在美國市場的風行 (附錄)，在台灣股市直接模擬指數型投資效果的方法，勢必是台灣 50? 因此，本研究要檢定的第四個假說是：

**假說 4：**報酬指數的報酬率與台灣 50 報酬率的相近度，高於其他六檔 ETF。試圖檢定的對立假說是：

$$\sum_{t=1}^{119} (R_{0t} - R_{mt})^2 > \sum_{t=1}^{119} (R_{it} - R_{mt})^2, i = 1, 2, \dots, 6. \quad (4)$$

檢定式(4)是利用 Grinold and Kahn (1995) 的概念，將報酬指數當作標竿指數 (benchmark index)，檢定七檔 ETF ( $R_{it}$ ) 報酬率相對於報酬指數報酬率 ( $R_{mt}$ ) 的偏離程度或追蹤誤差。利用於檢定關係式的統計量是自由度等於(119, 119)的 F 分佈。

註6: 「指數」與「報酬指數」的差異關鍵是「現金股利」的除息，根據「臺灣證券交易所發行量加權股價指數編製要點」第 5 點：報酬指數基值之調整公式為：當日基值 = 前一日基值 × ((前一日收盤後調整之總發行市值 - 當日發放現金股利總值) / 前一日收盤總發行市值)，見網頁 (<http://twse-regulation.twse.com.tw/TW/law/DAT0201.aspx?FLCODE=FL047579>)。

現代投資學理論起源於 Markowitz (1952)的報酬率平均變異數分析 (mean-variance analysis)，利用二維度的風險報酬平面 (risk-expected return space) 分析投資組合效益，如圖 1 所示 (註<sup>7</sup>)。在投資人風險趨避、市場零交易成本、可放空股票、股票報酬率平均數與變異數固定等假設下，可導出最佳投資組合的效率前緣 (efficient frontier)。當市場均衡時，市場投資組合 (market portfolio) 位於效率前緣；當存在無風險利率 (risk-free rate) 借貸市場，則由風險利率與市場投資組合則形成資本市場線 (capital market line)。

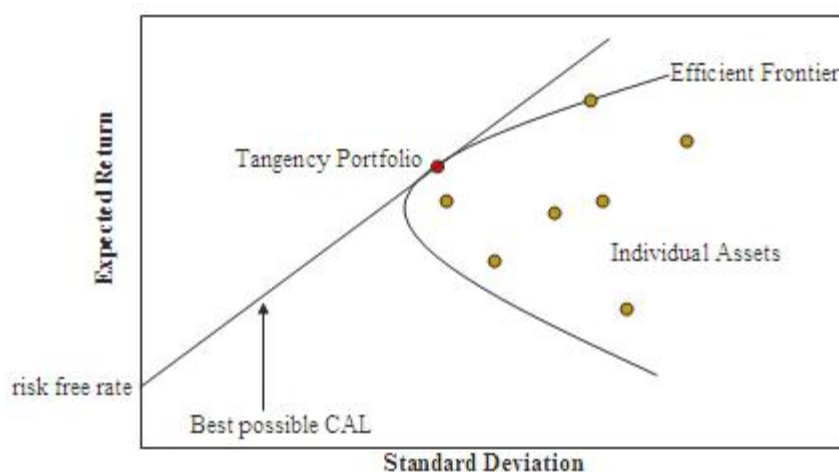


圖 1: 馬可維茲的風險報酬平面分析，來源維基百科 (wikipedia)

實證研究使用加權指數當作市場投資組合 (market portfolio) 或稱切線投資組合 (tangent Portfolio)，如美國的 S&P 500 指數或台灣的發行量加權股價報酬指數。理論上，市場指數位在效率前緣上，但因為市場指數是市場投資組合的近似值 (proxy)，更因為現實世界絕非無摩擦市場，更因為本研究僅使用七檔 ETF 當作市場的風險性資產，所以，理論的理想結果不可能發生。但基於市場的效率性 (報酬指數的成分股涵蓋七檔 ETF 的成分股)，本研究預期市場報酬指數比其他七檔 ETF 的位置更接近效率前緣 (Portfolio Frontier, PF)，這是本研究試圖檢定的最後一個假說：

**假說 5：**在馬可維茲 (Markowitz) 風險報酬平面上，建構七檔 ETF 形成的投資效率前緣 PF，則市場報酬指數與 PF 的距離，小於其他七檔 ETF 與 PF 的距離。

本研究將利用 ETF 或報酬指數在報酬風險平面 (圖 1) 的位置，算得它們與 PF 的最短距離，作為判定投資效率性 (偏離度) 的依據。投資效率前緣的公式、推導過程與偏離度計算呈現在附錄。

註<sup>7</sup>:圖 1 馬可維茲的風險報酬平面分析圖，來源是維基百科 (wikipedia)「現代投資組合理論」(Modern portfolio theory) 解說內容 ([https://en.wikipedia.org/wiki/Modern\\_portfolio\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory))。

## 參、分析結果

表 1 呈現七檔 ETF (0050 至 0056) 與發行量報酬指數的月報酬率 (2008 年至 2017 年 11 月)。表 1 第一列之「累積報酬」意謂：如果投資人在 2007 年底對七檔 ETF 各投資 \$100 元，採取買入持有 (buy and hold) 策略，至 2017 年 11 月 30 日的累積報酬率，相對映的淨值走走勢呈現在圖 2。所謂買入持有策略，意指投資人不但長期持有，而且將收穫的現金股利，再使用除息參考價再投資原來的標的。

圖 2 右端終值 (表 1 第一列之「累積報酬」率) 說明：自高而下的投資績效排序是：富邦科技 \$193.37 元 (93.37%)、台灣五十 \$182.7 元 (82.7%)、元大電子 \$176.61 元 (76.61%)、MSCI 金融的 \$154.7 元 (54.7%)、台灣高股息 \$150.09 元 (50.09%)、台商五十的 \$131.17 元 (31.17%)，最後是台灣中一百 \$127.29 元 (27.29%)。它們的年化報酬率介於 6.88% 與 2.46% 之間，如表 1 第二列所示。所謂「年化報酬率」，以台灣中一百的 2.46% 為例，複利成長 119 個月 (9 年 11 個月)，故將 1.2729 開方 119，再減 1 獲得月報酬率，然後乘以 12 年化。

表 1. 七檔 ETF 與發行量報酬指數的月報酬率 (2008 年 1 月至 2017 年 11 月)

	0050 台灣 50	0051 中型 100	0052 富邦科技	0053 元大電子	0054 台商 50	0055 MSCI 金融	0056 高股息	發行量 報酬指數
累積報酬	82.70%	27.29%	93.37%	76.61%	31.17%	54.70%	50.09%	79.81%
年化報酬率	6.27%	2.46%	6.88%	5.90%	2.77%	4.50%	4.18%	6.10%
月平均報酬率	0.6502%	0.4232%	0.7570%	0.6671%	0.4140%	0.6435%	0.4897%	0.6441%
月標準差	5.3307%	6.5680%	6.3091%	6.0922%	6.0524%	7.4660%	5.3929%	5.4667%
夏普指數	5.005	2.626	4.933	4.495	2.786	3.537	3.711	4.835
貝它係數	0.957	1.160	1.039	1.057	1.054	1.131	0.932	
最大值	15.05%	18.92%	16.28%	15.28%	18.86%	31.03%	14.36%	15.00%
最小值	-16.87%	-26.56%	-19.57%	-19.86%	-19.54%	-23.70%	-22.36%	-18.59%
偏態	-0.3679	-0.5101	-0.4927	-0.5290	-0.4545	0.1766	-0.6381	-0.3226
峰態	1.0665	2.7296	1.1433	1.3302	2.0777	3.1369	2.8532	1.7002
中位數	1.2351%	1.2291%	1.2507%	1.2308%	1.0599%	0.9749%	1.1216%	1.3534%
報酬排序	2	8	1	4	7	5	6	3
夏普排序	1	8	2	4	7	6	5	3
標準差(遞增)	1	7	6	5	4	8	2	3
貝它(遞增)	2	7	3	5	4	6	1	



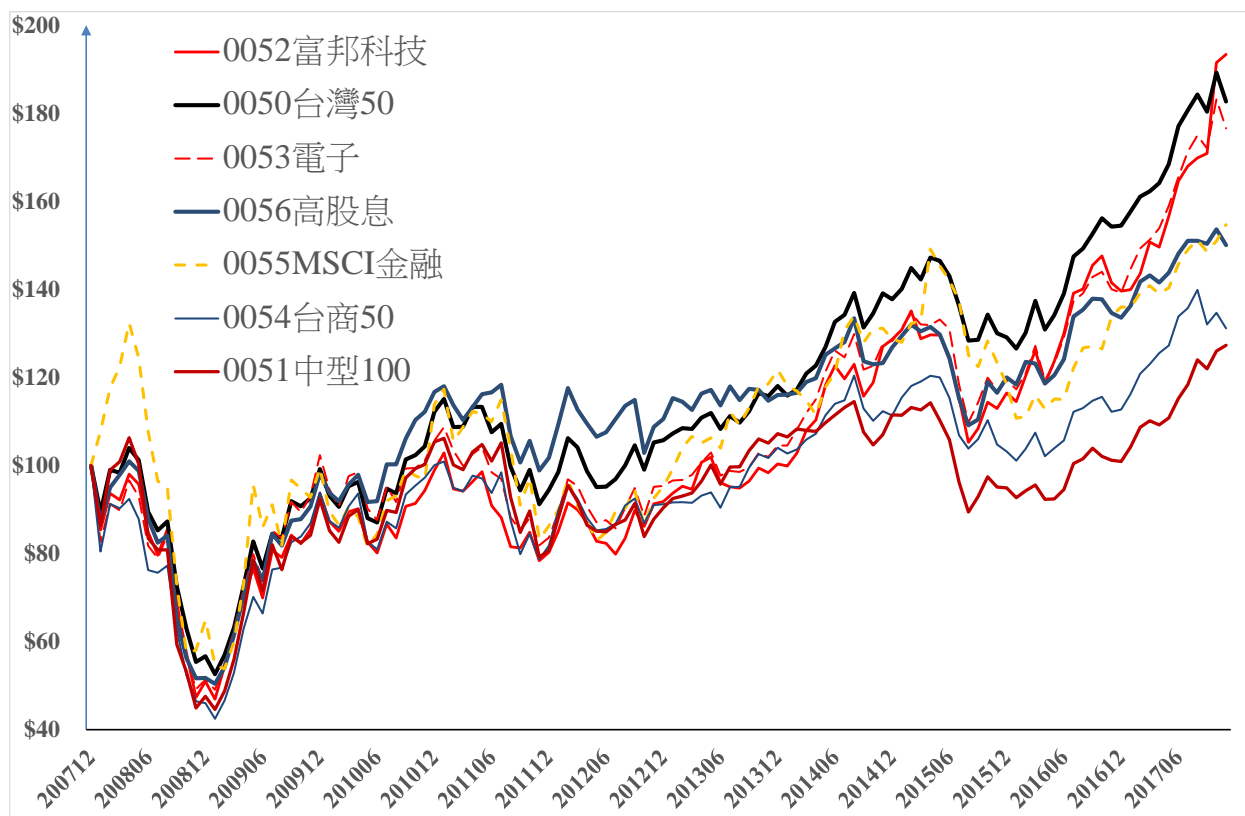


圖 2. 七檔 ETF 之累積報酬走勢圖

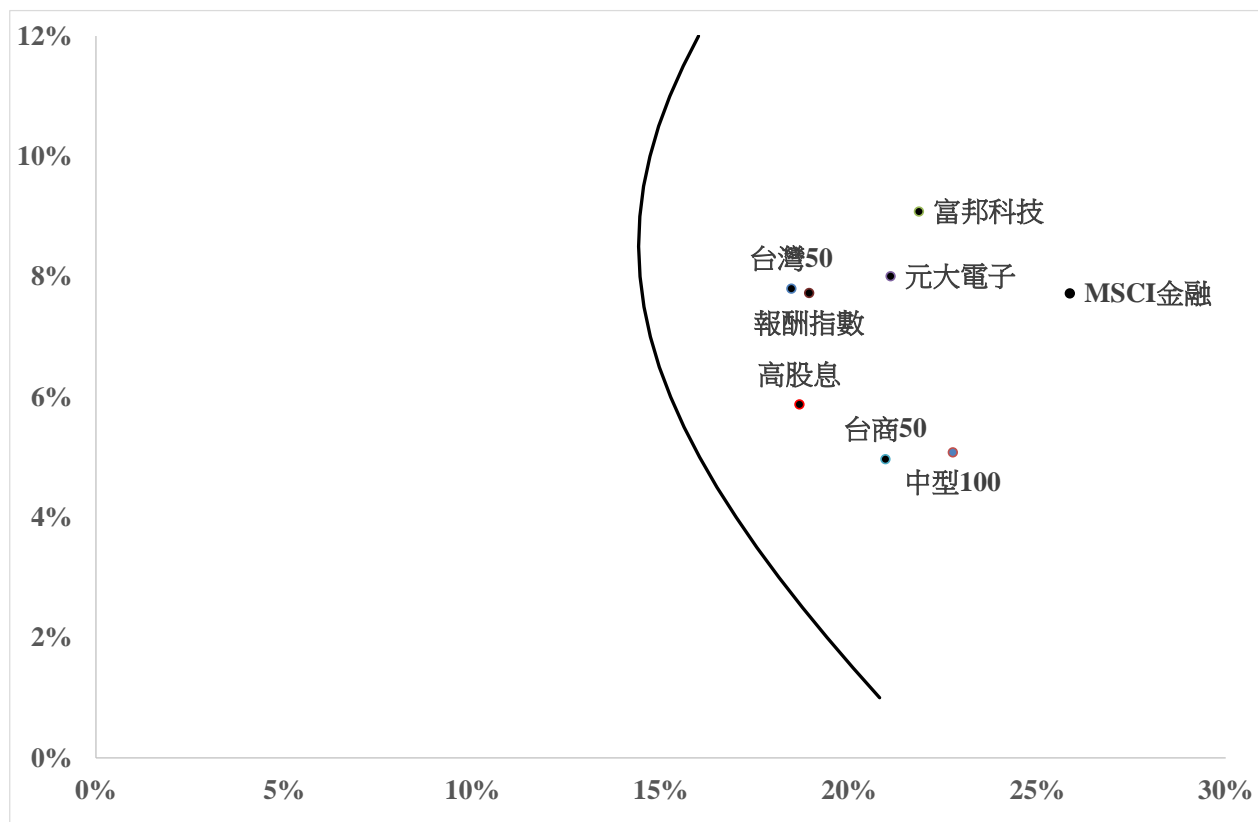


圖 3. 七檔 ETF 形成之投資效率前緣 (PF) 與報酬指數

接續觀察表 1 第三列的月平均報酬率（式(1)至(4)的 $\bar{R}_i$ ），也是富邦科技居第一（0.757%）、寶來電第二（0.6671%）、台灣 50 第三（0.6502%）。假設無風險利率等於 1.2%（月息 0.1%），用以計算夏普係數，獲得台灣 50 最佳（5.005），其次是富邦科技（4.933）與元大電子（4.495）。至於報酬率的中位數，則是富邦科技最佳（1.2507%），台灣 50 次之（1.2351%），寶來電第三（1.2308%）；中位數幾乎等於平均數二倍之現象，說明上漲趨勢偏多，但下跌時的震幅遠大於上漲的震幅。

將表 1 各欄的「月平均報酬率」與「月標準差」年化（前者乘以 12，後者乘以 12 開平方），再將此八個座標呈現在圖 3 的報酬（Y 軸）與風險（X 軸）平面。自上而下分別是（平均報酬率排序）：富邦科技（報酬 9.08%，風險 21.86%）、元大電子（8%，21.1%）、台灣 50（7.8%，18.47%）、報酬指數（7.73%，18.94%）、MSCI 金融（7.72%，25.86%）、高股息（5.88%，18.68%）、中 100（5.08%，22.85%）與台商 50（4.97%，20.97%）。

以上的資訊證明：台灣 50、台灣中 100 與台灣高股息的投資績效皆未呈現顯著績效，本研究結論：假說 1、假說 2 與假說 3 不成立。值得特別注意的是，過去的研究皆發現台灣 50 的報酬績效最佳（吳明哲等，2011；劉任昌，2015a），本研究則發現台灣 50 退居第二。此外，吳明哲等（2011）發現 MSCI 金融的績效最差，本研究卻發現中 100 的績效最差（劉任昌，2015a）。下一節將詳細解讀這些現象。

值得特別注意的是，除了 MSCI 金融外，偏態均小於 0；這個現象也反映在各 ETF 的報酬率最小值絕對值，大於相對映的最大值。例如，報酬指數的單月最大跌幅是 18.59%，最大漲幅是 15%。以上事實說明，台股具有對空頭市場反應過度的跡象，導致短期跌幅大，長期卻呈現可觀成長。

表 3 呈現七檔 ETF 與報酬指數的月報酬率相關係數，台灣 50 與報酬指數的相關性最高（0.9818），富邦科技與 MSCI 金融的相關性最低（0.6358）。最後一欄針對報酬指數的欄位說明，MSCI 金融與市場的相關性最低（0.8281），其他 ETF 的相關係數則是 0.9 以上。

表 3.七檔 ETF 與發行量報酬指數的月報酬率相關係數（2008 年 1 月至 2017 年 11 月）

	中型 100	富邦科技	元大電子	台商 50	MSCI 金融	高股息	報酬指數
台灣 50	0.9389	0.9220	0.9566	0.9442	0.8061	0.9220	0.9818
中型 100		0.8722	0.9208	0.9307	0.7927	0.9396	0.9654
富邦科技			0.9585	0.8680	0.6358	0.8726	0.9006
元大電子				0.9350	0.6808	0.9238	0.9488
台商 50					0.6994	0.9287	0.9523
MSCI 金融						0.7373	0.8281
高股息							0.9448

表 3 似乎已經暗示假說 4 成立，接下來檢定其顯著性。為檢定假說 4 而算得的 ETF 追蹤誤差呈現在表 4 的第二列，台灣 50 如預期地呈現最低量（0.0108%）。本研究將檢定式(4)轉化成：

$$F_i = \frac{\sum_{t=1}^{119}(R_{it}-R_{mt})}{\sum_{t=1}^{119}(R_{ot}-R_{mt})}, i = 1, 2, \dots, 6. \tag{5}$$

他們的計算結果呈現在表 4 的第三列。在自由度等於(119,119)的條件下，檢定式(5)的各統計量皆異常顯著 (P 值趨近 0)，因此結論假說 4 成立。

表 4. ETF 相對於股價報酬指數的追蹤誤差

ETF	台灣 50	中型 100	富邦科技	元大電子	台商 50	MSCI 金融	高股息
追蹤誤差	0.0108%	0.0370%	0.0757%	0.0380%	0.0350%	0.1803%	0.0326%
比台灣 50 之 $F_i$ 統計量		3.4163	6.9927	3.5127	3.2357	16.6625	3.0143

圖 3 的投資效率前緣是利用附錄的式(A15)繪製獲得。然後，我們利用 PF 和各個 ETF 與報酬指數座標距離的公式，定義：

$$D_i^2 = (\sqrt{12} \times s_i^2 - x)^2 + (12 \times \bar{R}_i - y)^2, (x, y) \in PF, i = 0, 1, 6, m. \tag{6}$$

式(6)的  $(x, y) \in PF$  意謂位於圖 3 的投資效率前緣(PF)上，也就是必須遵循附錄的式(A15)；各個投資標的 (ETF 或報酬指數) 的屬性  $(s_i^2, \bar{R}_i)$  是表 1 與圖 3 表示的固定數值。然後透過變換不同年化報酬率 ( $y=1\%$  至  $y=12\%$ )，即可繪製獲得圖 4。觀察圖 4 各條曲線的最高點，就是各個 ETF 與報酬指數和 PF 的最近距離。

顯然，和 PF 最近距離者是高股息，因此結論假說 5 不成立。

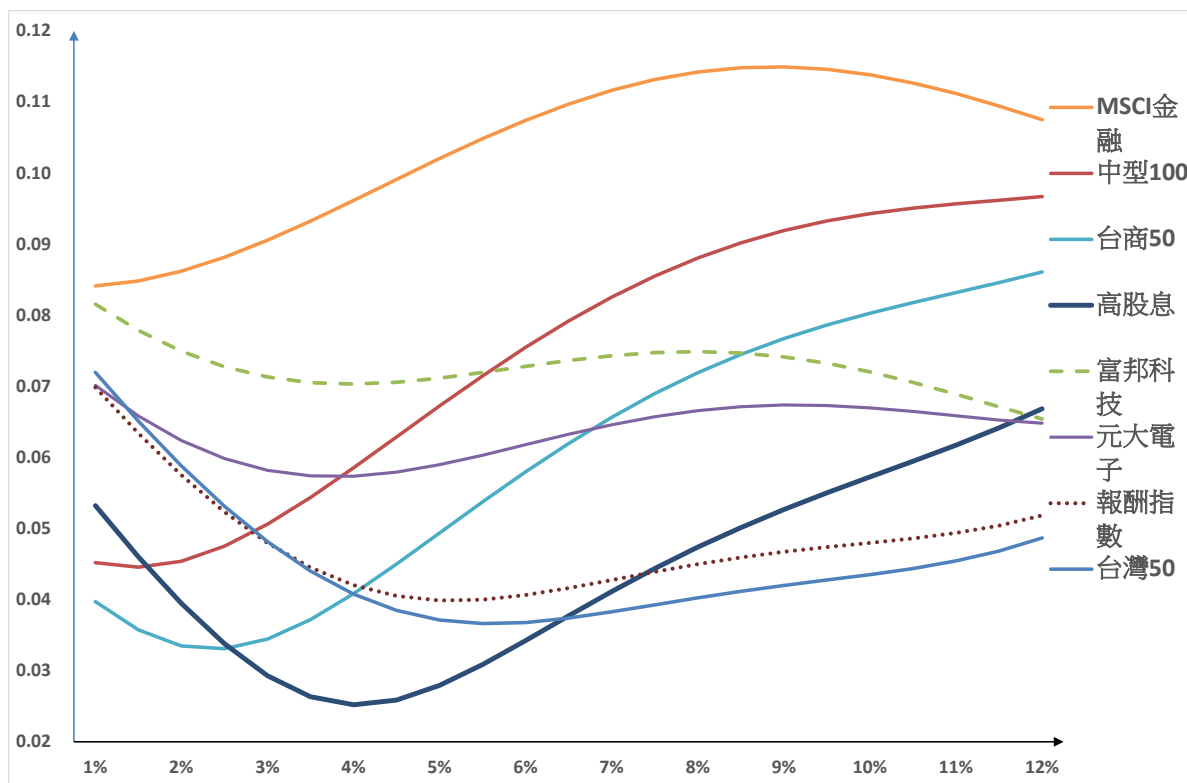


圖 4. 七檔 ETF 與報酬指數距離投資效率 (在不同報酬率) 前緣的距離

## 肆、結論

在不同的樣本區間，不同 ETF 或不同股票的相對績效表現不同。林容竹（2007）發現台灣中 100 在上市之初，績效表現明顯優於台灣 50 與富邦科技；吳明哲等（2011）則發現，台灣 50 表現最佳，中 100 次之。本研究透過最天期之追蹤，也進行 Markowitz（1952）的效率前緣建構參考架構，證明台灣 50 與富邦科技最具有投資效率性；而且，富邦科技的投資績效表現最佳，中 100 的表現最差。以上是純粹就歷史統計資料，說明台灣中 100 不如其他六檔 ETF，以下解釋他們背後的因素。

首先解讀 S&P 500 指數型基金（附表 1）受美國市場歡迎之可能因素。美國上市交易股票超過 6,000 家，S&P 500 的五百支成分股機制，讓蘋果及時在 1982 年就納入成分股，到目前為止，累積報酬率數百倍。但是蘋果卻是遲至 2015 年 3 月 18 日才被納入道瓊 30 成分股。以上事實說明 SPY 比 DIA 或 QQQ 更受投資人歡迎的原因。

標普指數從美國市場超過 6,000 支股票挑選 500 支成分股，相當於台灣 50 從 800 多家上市公司挑選 50 支成分股，獲得適當的自動汰弱留強機制（劉任昌，2015b）。ETF 的兩大特徵是：第一、被動操作，大幅降低交易成本，以及避免基金經理道德的風險；第二、在集中市場流通，可在交易時間隨時買賣，不須擔心作業時間造成之預期落差。

台積電（2330）、鴻海（2317）與大立光（3008）採取穩健策略，早年完全不發現金，卻發高比率的股票股利，近年則是發放高現金；而且，三者 2017 年是完全不發股票股利，向投資人傳達成長有限的訊息。這個事實說明台股呈現效率市場的特徵，價格已經反應未來的價值，不能太依賴既往的殖利率作為選股判斷。亦即，機構投資人已經對未來高配息的股票洞見先機，大筆進貨而拉高價格，導致股息殖利率呈現相對較低，不受到高股息基金的青睞。台積電與鴻海不曾被納入台灣高股息成分股，股價穩定的中華電、台塑化與南亞，卻在最近被剔除，這也是貢獻台灣高股息（0056）波動的原因。

相對的，某些股票配息不穩定，機構投資人不愛，價格相對低；當某年配息驟增時，殖利率就亮眼。這種股票就容易被納入台灣高股息成分股，但卻也很容易又被剔除。劉任昌（2015c）舉出特定高股息成分股變動案例說明：兆豐金在 2005 年 8 月 13 日除息，殖利率達 6%，發放總額 \$174 億元的股息。但到了 10 月，兆豐董事會宣告要改善資本適足率，進行每股 \$21 元的現金認購，相當於呼籲股東繳回總額 \$241 億元的股本擴充。信昌化也曾經是臺灣高股息的成分股，它也是採取左手跟股東說要增資，右手發放現金股利，以成就高殖利率的美名，終究從臺灣高股息名單剔除。

ETF 的缺點之一是「股利不能再投於 ETF，一般共同基金則可以再投入基金，享受複利效果。」（吳明哲等，2011）也就是進能在季度（或年度）獲取股息時，才再投資；不能如美國股票般的選擇股票股利，或是在個別股票發放現金時，立即再投資。ETF 的另一個缺點是 Bogle（2007）點名的，交易 ETF 與交易一般股票相當，投資人容易頻繁進出，增加交易成本，更容易坐失長期績優股票的成長機會。

### 參考文獻

- 李存修、尤亭歡 (2015),「台灣、香港、中國大陸三地 ETF 追蹤誤差之研究」,《兩岸金融季刊》,第 3 卷第 1 期,1-22。
- 吳明哲、邱國欽、黃佩柔、許寶文 (2011),「台灣指數股票型基金之績效表現與超額報酬分析」,《財金論文叢刊》,第 15 卷,70-79。
- 李建興、彭琪祿、施仁貴 (2005),「以限制追蹤誤差方式建構增長型指數基金：以台灣 50 指數為例」,《金融風險管理季刊》,第 1 卷第 3 期,1-26。
- 林容竹 (2007),「台灣指數股票型基金 (ETFs) 訂價效率性之實證研究」,《永豐金融季刊》,第 38 期,97-112。
- 林靖中、江明憲、詹司如、林昭賢 (2006),「台灣 50 ETF 對指數成分股流動性的影響」,《經濟與管理論叢》,第 2 卷第 2 期,187-205。
- 劉任昌 (2015a),「投資台灣 50 ETF 的優勢與時機」,《理財周刊》,第 794 期,102-103。
- 劉任昌 (2015b),「台灣中一百值得投資嗎?」,《理財周刊》,第 796 期,98-99。
- 劉任昌 (2015c),「台灣五十與台灣高股息之比較」,《理財周刊》,第 800 期,100-101。
- 劉真如 (2008),《買對基金賺大錢》,台北市：商周出版。
- Bodie,Z., A. Kane, J.A. Marcus, and R. Jain (2014). Investments (Asia Global Edition). New York: McGraw Hill.
- Bogle, J.C. (2007). A Little Book of Common Sense Investing: The Only Way to Guarantee Your Fair Share of Stock Market Returns. Hoboken: New Jersey.
- Cronqvist, H., S. Siegel, and F. Yu (2015). "Value versus growth investing: Why do different investors have different styles?" Journal of Financial Economics, Vol. 117, No. 2, 333-349. Doi: 10.1016/j.jfineco.2015.04.006
- Elton, E.J. and M.J. Gruber (2013). "Mutual Funds". In G.M. Constantinides, M. Harris, and R.M. Stultz ed. Handbook of the Economics of Finance Vol. 2B, 1011-1061, Amsterdam: Elsevier.
- Fama, E.F. (1970). "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". Journal of Finance. 25 (2): 383-417. Doi:10.2307/2325486
- Fama, E.F. and K.R. French (1998). "Value versus growth: The international evidence." Journal of Finance, Vol. 53, No. 6, 1975-1999. Doi: 10.1111/0022-1082.00080
- Grinold, R.C. and R.N. Kahn (2000). Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Producing Superior Returns and Controlling Risk. McGraw-Hill.
- Jorion, P. (2003). "Portfolio optimization with tracking-error constraints." Financial Analysts Journal, Vol. 59, No. 5, 70-82. Doi: 10.2469/faj.v59.n5.2565
- Lakonishok, J., A. Shleifer, and R. W. Vishny (1994). "Contrarian investment, extrapolation, and risk." Journal of Finance, Vol. 49, No. 5, 1541-1578. Doi: 10.1111/j.1540-6261.1994.tb04772.x

Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection". Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, 77–91.

Doi:10.2307/2975974

Merton, R. (1972). "An analytic derivation of the efficient portfolio frontier." Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 7, No. 4, 1851–1872. Doi: 10.2307/2329621

Roll, R. (1992). "A mean/variance analysis of tracking error." Journal of Portfolio Management, 18, 13-22.

Ross, S., R. Westerfield, J. Jaffe, and B. Jordan (2016). Corporate Finance. New York: McGraw-Hill.

Saunders, A. and M.M. Cornett (2018). Financial Institutions Management: A Modern Perspective. New York: McGraw-Hill.

## 附錄

附表 1 下載自理柏公司 (<http://lipperalpha.financial.thomsonreuters.com/>)。

附表 1. 理柏公司基金規模報告 (Lipper Performance Report) 2017 年 11 月 30 日

基金名稱	總資產	投資目標	YTD	1 週	4 週	13 週	52 週	2 年	3 年	5 年
SPDR S&P 500 ETF	\$252,872.7	SPSP	20.37	2.01	2.86	7.62	23.15	14.76	10.66	15.61
Vanguard 500 Index; Adm	\$224,167.2	SPSP	20.45	2.01	2.87	7.65	23.26	14.86	10.74	15.70
Vanguard TSM Idx; Adm	\$182,030.3	MLCE	19.96	1.93	2.93	7.87	22.79	14.77	10.52	15.59
Vanguard Instil Index; Inst	\$138,536.7	SPSP	20.5	2.02	2.87	7.65	23.26	1.87	10.75	15.71
iShares: Core S&P500	\$133,412.2	SPSP	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
Vanguard TSM Idx; Inv	\$123,434.9	MLCE	19.86	1.94	2.93	7.85	22.67	14.65	10.41	15.46
Vanguard TSM Idx; Inv+	\$121,482.4	MLCE	19.98	1.93	2.94	7.86	22.80	14.79	n/a	n/a
Vanguard Tot I Stk; Inv	\$116,279.0	IMLC	24.81	-0.22	0.22	4.53	27.60	12.71	6.00	7.49
Vanguard TSM Idx; Inst	\$108,166.6	MLCE	19.97	1.93	2.92	7.86	22.80	14.78	10.53	15.60
Vanguard InstilIdx; InsP	\$92,835.3	SPSP	20.48	2.01	2.87	7.65	23.29	14.89	10.77	15.73
Fidelity Constrafund	\$89,362.6	LCGE	31.83	0.51	1.50	7.30	33.80	15.46	12.95	16.39
Vanguard Tot I Stk; Ins+	\$88,781.1	IMLC	24.99	-0.21	0.25	4.59	27.78	12.83	6.12	7.62
Vanguard TSM Idx; ETF	\$86,920.1	MLCE	19.95	1.94	2.94	7.87	22.78	14.77	10.53	15.59
Vanguard Wellington; Adm	\$85,376.7	MTAG	13.39	1.49	1.49	5.34	15.69	11.32	7.84	10.85
Vanguard Tot Bd II; Inv	\$85,154.7	IID	3.00	-0.42	-0.38	-0.61	3.29	2.52	2.01	1.79
American Funds Gro; A	\$84,435.4	LCGE	24.67	0.77	1.81	7.38	26.11	15.01	11.97	16.13
iShare: MSCIEAFE ETF	\$81,799.6	IMLC	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
Vanguard Tot Bd; Adm	\$80,973.6	IID	3.09	-0.41	-0.28	-0.58	3.54	2.70	2.12	1.89
Vanguard 500 Index;ETF	\$77,968.2	SPSP	20.45	2.01	2.87	7.64	23.26	14.86	10.73	15.70
American Funds Inc;A	\$77,067.2	MTAM	11.59	0.98	0.77	4.06	13.96	10.32	6.24	9.46
Fidelity 500 Idx; Pr	\$72,154.9	SPSP	20.45	2.01	2.87	7.64	23.25	14.85	10.73	15.69
American Funds CIB; A	\$71,515.3	GEI	13.14	0.79	1.24	2.90	16.17	9.03	4.72	7.67
Dodge & Cox Stock	\$68,443.8	LCVE	15.52	2.49	2.40	7.37	16.67	16.58	9.97	16.35
Vanguard FTSE Dev MkETF	\$65,697.3	IMLC	24.36	0.32	0.43	5.24	27.52	11.64	6.71	8.77
Dodge & Cox Intl Stock	\$65,455.6	ILCC	21.47	-0.96	-1.15	2.57	24.90	11.79	3.40	9.24

以下馬可維茲 (Markowitz) 投資模型推導是根據 Merton (1972) 的架構。假設市場上存在  $n$  支資產 (股票)，股票  $i (i=1, \dots, n)$  的報酬率是  $\tilde{R}_i$ 。再假設  $\mu_i (i=1, \dots, n)$  是股票  $i$  的報酬率，以及  $\sigma_{ij} (i, j=1, \dots, n)$  是股票  $i$  與股票  $j$  的報酬率共變異數，也就是：

$$\mu_i = E[\tilde{R}_i] \quad (A1)$$

$$\sigma_{ij} = E[(\tilde{R}_i - \mu_i)(\tilde{R}_j - \mu_j)]. \quad (A2)$$

當  $i=j$  時，習慣使用以下符號代表股票  $i$  的變異數：

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ii}.$$

接下來，再假設他們的預期報酬率向量是  $\mu$ ，變異數矩陣是一個可逆（nonsingular）矩陣  $V$ （亦即它的反矩陣  $V^{-1}$  存在），也就是假設：

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \sigma_{ij} & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A4})$$

使用  $w$  代表對  $n$  個資產的投資權重向量（portfolio weight vector），亦即

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A5})$$

然後使用  $r$  代表投資組合的報酬率，也就是

$$r = \mu^T w = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_n w_n = [\mu_1 \quad \cdots \quad \mu_n] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A6})$$

也就是說，我們使用上標  $T$  代表進行向量（或矩陣）的轉置（Transpose）運算。此外，投資權重向量須滿足權重和等於 100%，也就是：

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}^T w = w_1 + \cdots + w_n = [1 \quad \cdots \quad 1] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A7})$$

在上式中，為求使用之符號精簡，純量  $1$  與向量  $\mathbf{1}$  使用相同符號表式；必要做區隔時，則使用粗體  $\mathbf{1}$  代表向量。

使用函數  $f(w)$  代表投資組合  $w$  的變異數，則

$$f(w) = w_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + w_i w_j \sigma_{ij} + \cdots + w_n^2 \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = w^T V w \quad (\text{A8})$$

馬可維茲報酬平均變異數模型（mean-variance model）假設在給定平均報酬  $r$  條件下（限制式(A6)與(A7)），求取最佳投資組合(A5)，使得投資組合變異數（式(A8)）最小，也就是：

$$\left. \begin{array}{l} \text{極小化：} \quad \frac{1}{2} w^T V w \\ \text{限制式：} \quad \mu^T w = r \\ \quad \quad \quad \mathbf{1}^T w = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{A9})$$

上式將目標函數（式(A8)）折半，是為方便以下拉式函數（Lagrangian function）的運算，也就是：

$$L = \frac{1}{2} w^T V w + \lambda(r - \mu^T w) + \delta(1 - \mathbf{1}^T w). \quad (\text{A10})$$

上式的  $\lambda$  與  $\delta$  是純量，稱作拉式乘數（Lagrangian multipliers）；求取極值的一階條件

(first order conditions) 是：

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L}{\partial w} = Vw - \lambda\mu - \delta\mathbf{1} \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = r - \mu^T w \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \delta} = \mathbf{1} - \mathbf{1}^T w \end{cases} \quad (\text{A11a, A11b, A11c})$$

A11c)

對式(A11a)移項，再乘以變異數矩陣  $V$  的反矩陣，就得到：

$$w = \lambda V^{-1}\mu + \delta V^{-1}\mathbf{1}. \quad (\text{A12})$$

再用  $\mu^T$  乘式(A12)，也用  $\mathbf{1}^T$  乘式(A12)；再分別利用式(A11b)與式(A11c)的結果，就得到：

$$\begin{cases} r = \lambda\mu^T V^{-1}\mu + \delta\mu^T V^{-1}\mathbf{1} \\ \mathbf{1} = \lambda\mathbf{1}^T V^{-1}\mu + \delta\mathbf{1}^T V^{-1}\mathbf{1} \end{cases} \quad (\text{A13})$$

使用 Jorin (2003)的表達符號，定義：

$$\begin{cases} a = \mu^T V^{-1}\mu, & b = \delta\mu^T V^{-1}\mathbf{1}, \\ d = a - \frac{b^2}{c}, & c = \mathbf{1}^T V^{-1}\mathbf{1}. \end{cases} \quad (\text{A14})$$

則式(A13)可簡化成

$$\begin{cases} r = \lambda a + \delta b \\ \mathbf{1} = \lambda b + \delta c \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} \lambda = \frac{rc-b}{cd} \\ \delta = \frac{a-rb}{cd} \end{cases}$$

最後獲得 Jorin (2003, p. 78)的結果，即在投資效率前緣曲線上，相對於報酬率  $r$  的變異數  $v(r)$ 是：

$$v(r) = \frac{1}{d} \left( r - \frac{b}{c} \right)^2 + \frac{1}{c}. \quad (\text{A15})$$

在圖 3 的 X-Y 平面上，式(A15)的  $v(r)$ 在 X 軸， $r$  在 Y 軸。然後透過極小化的運算過程，計算平面上每一點距離(A15)橢圓曲線的最小距離。至於數值部分，則是先利用表 1 的報酬平均數，再利用表 1 的標準差與表 2 的相關係數矩陣，獲得變異數矩陣。再代入式(A14)算得  $a, b, c, d$  值，就可以用(A15)繪製圖 3 的投資效率前緣，也算得圖 4 的投資效率前緣各點與不同座標點的距離。