

生平:

Euclid (約 -330 ~ -260)，希臘數學家，《原本》的編著者，其公理化的呈現方式，深深影響了數學的發展。

亞歷山大大帝在西元前 323 年死於征途後，帝國分崩，埃及部分落入大將軍 Ptolemy I (天文學家 Ptolemy 與其同名，但無血緣關係) 手中。Ptolemy 於西元前 306 年開始在尼羅河口建立亞歷山大城，設置圖書館及書院，從各方面招請學者，使亞歷山大代替了雅典，成為希臘文化中心。Euclid 就是由 Ptolemy 請到亞歷山大書院主持數學教程的。他為了書院有數學課本，於是把已知的初等數學編成十三卷的《原本》。

貢獻:

《原本》的內容：

第一卷很自然地是從必要的初步的定義、公設和公理開始；

第二卷討論面積的變換和畢氏學派的幾何式代數；

第三卷包括中學幾何課本中許多關於圓、弦、割線、切線及有關角的量度的定理；

第四卷討論用直尺和圓規作正三角形、正四、五、六和十五邊形，以及在給定圓內〔外〕作這些內接〔外切〕正多邊形；

第五卷是對歐多克索斯比例理論的精彩闡述；

第六卷把歐多克索斯的比例理論應用於平面幾何；

第七、八、九卷講的是初等數論；

第十卷討論無理數；

第十一、十二、十三卷講立體幾何——關於空間中的直線和平面的定義、定理，以及關於平行六面體的定理，可在第十一卷找到；

窮竭法在第十二卷論述體積時起重要作用；在第十三卷研究了五種正多面體。

公理的正確性是無庸置疑的，因為它們都經過了長期實踐的反覆檢驗，除了 第 5 公設外，其它公理的正確性幾乎是一目瞭然的。

理論：

歐幾里得提出了 5 個公理和 5 個公設：

公理 1 與同一件東西相等的一些東西，它們彼此也是相等的。

公理 2 等量加等量，總量仍相等。

公理 3 等量減等量，餘量仍相等。

公理 4 彼此重合的東西彼此是相等的。

公理 5 整體大於部分。

公設 1 從任意的一個點到另一個點，作一條直線是可能的。

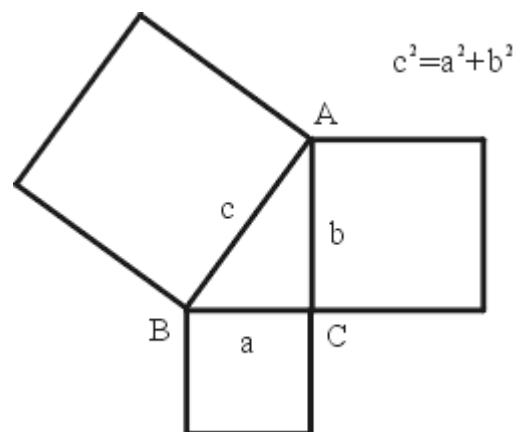
公設 2 把有限的直線不斷循直線延長是可能的。

公設 3 以任一點為圓心和任一距離為半徑作一圓是可能的。

公設 4 所有的直角都相等。

公設 5 如果一直線與兩直線相交，且同側所交兩內角之合小於兩 直角，則兩直線無限延長後必相交於該側的一點。

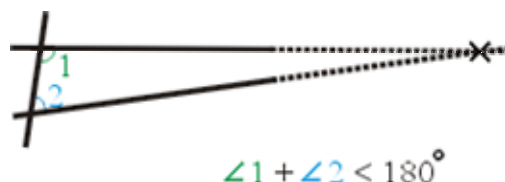
一.畢氏定理：有一直角三角形 ABC ，則長邊的平方會等於其他兩邊的平方和。由幾何方面來說，如果我們在三邊上各作一個正方形，那麼兩個小正方形的面積和就會等於大正方形的面積（見圖一）。



圖一 $c^2=a^2+b^2$

二.三角形三內角之和等於 180° ，如果以徑 (radian) 為單位，也可以說三角形三內角之和等於 π

這本書在當時受到重視，不單只是爲了學幾何，主要還要學一種邏輯推理的方法。歐幾里得用幾個很明顯的事實——公理，把幾何的結論從公理用邏輯的方法推出。而在他所列出的公理當中，較受爭議的是平行公理。平行公理原來是說：有兩條直線被一直線所截，如果截角的和小於 180° ，那麼這兩條直線在充分延長後，必相交於一點。（見圖二）



圖二

另一個簡單的說法是：假使有一直線和線外一點，那麼通過那個點就剛剛好只有一條直線和原來的直線平行。平行者，就是這兩條直線不相交（見圖三）。



圖三

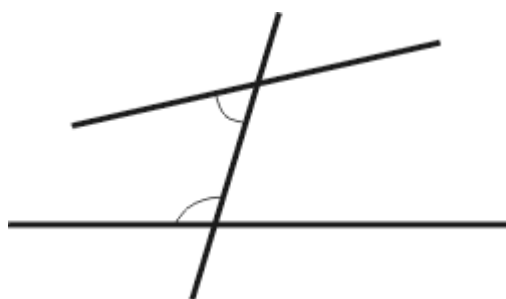
這個平行公理在所有公理之中是最不明顯的，所以數學家或是對數學有興趣的人便想從其他的公理去推得平行公理。而這努力延持了兩千年，後來證明這是不可能的，於是有了非歐幾何學的發現，這在人類思想史上是非常特別、有意思的事實。因此我感覺到這是西洋數學和中國數學不同的地方。

《九章算經》是中國古代最有名的數學書，一共九章，第九章談的是所謂勾股，勾、股就是直角三角形中較短的兩個邊，一個叫做勾，另一個就叫做股，而最長的那個邊便稱爲弦。勾股定理也就是剛才所謂的畢氏定理，所以它的發現，中國人也應該有份。但是在中國的幾何中，我無法找到類似三角形三內角和等於 180° 推論，這是中國數學中沒有的結果。

因此，得之於國外數學的經驗和有機會看中國數學的書，我覺得中國數學都偏應用；講得過分一點，甚至可以說中國數學沒有純粹數學，都是應用數學。這是中國科學的一個缺點，這個缺點到現在還存在，大家都講應用，不注意基礎科學。當然應用很要緊，但是許多科學領域基本的發現都是在基礎科學。

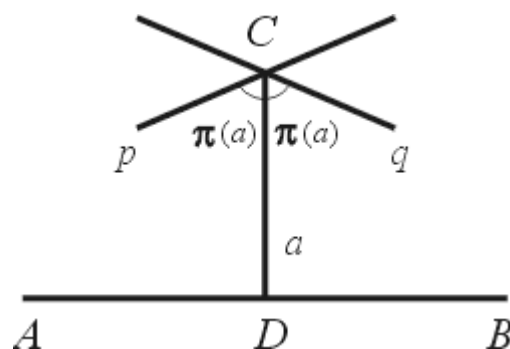
三. 非歐幾何

第五公設說：「兩直線相交於內角和小於二直角的一側」。」這個公設就是大家熟知的平行公設。



很久以來，數學家就對這個公設不太舒服。相信連 Euclid 本人也不滿意，否則他不曾把這個公設擺在最後面，直到非用不可時才提出來；並且他也不曾把這個公設講得這麼彀扭。有些人想找一個看來比較順眼的公設代替它，有些人想從其他幾個公設導出這個公設。最有名的是把第五公設換成以下的平行公設：「過線外一點可作唯一的直線平行這已知線」。直到十八世紀後期，才有一些數學家逐漸相信平行公設是獨立於 Euclid 的其他公設。

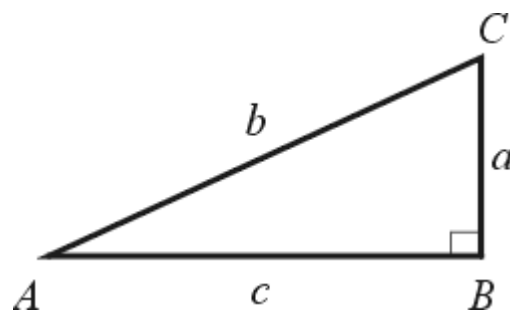
真正的突破來自一份不太有名的俄國期刊。1829 年 Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793~1856 年) 提出非歐幾何的概念，在這種幾何學裏，過線外一點存在不只一條直線平行於這已知線。1832 年 János Bolyai (1802~1860 年)，奧匈帝國的一個軍官，也獨立的提出相似的結果。事實上早在 Lobachevsky 與 Bolyai 之前，偉大的 Gauss 早已開始研究非歐幾何學，只是沒有發表而已。



Lobatchevsky 的想法可以簡單的描述如下。他同意歐氏幾何的其他公設，只把平行公設改變。設 AB 是已知直線， C 是線外一點， a 是 C 點到 AB 的距離。

Lobatchevsky 假設對於這樣的 C 點與 AB ，必存在一個角度 $\pi(a)$ （隨 a 的大小而改變），使得通過 C 點的直線分成兩類：一類直線與 AB 相交，這些直線與 CD 的夾角小於 $\pi(a)$ ；剩下一類直線不與 AB 相交，這類直線最邊界的是直線 p 與 q ， p 與 q 就是通過 C 點的「平行線」。Lobatchevsky 決定，

$$0 \leq \pi(a) \leq \frac{\pi}{2} \text{ 且 } \pi(a) = 2 \tan^{-1} \frac{1}{e^a}$$



因此，若 C 在 AB 上， $\pi(a) = \frac{\pi}{2}$ ，這兩條平行線與 AB 重合；若 C 在無窮遠處， $\pi(a) = 0$ 。由此他能導出三角公式，

$$\begin{aligned}\cot \pi(a) &= \cot \pi(c) \cdot \sin A \\ \sin A &= \cos B \cdot \sin \pi(b) \\ \sin \pi(c) &= \sin \pi(a) \cdot \sin \pi(b)\end{aligned}$$

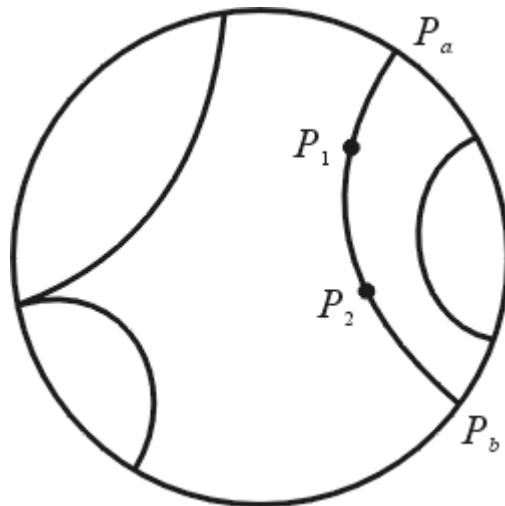
令人驚奇的，這些三角公式竟和球面三角的公式極相像：只要我們把球面三角的 a, b, c 換成 ia, ib, ic ，就得到非歐幾何的三角公式。

在這種幾何空間中，三角形的三內角和小於 π 。半徑為 r 的圓的周長是

$2\pi(e^r - e^{-r})$ ，面積是 $2\pi(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}})^2$ 。一般的說，如果 $y=f(x)$ 是這種幾何空間

$$ds = \sqrt{(dy)^2 + \frac{(dx)^2}{\sin^2 \pi(x)}}$$

上的曲線，其弧長元素是



Lobatchevsky 幾何還可以用另一個觀點來瞭解，這是 Henri Poincaré（1854～1912 年）提出來的。在 Poincaré 的模型中，我們考慮的「點」是圓內的所有的點（不含圓 P 上的點）；「直線」有兩種，一種是通過圓心的直線，另一種是與圓周正

交的任意圓弧。兩點 P_1 與 P_2 的距離定為 $\ln\left(\frac{P_1 P_2}{P_1 P_a} \cdot \frac{P_2 P_a}{P_1 P_b}\right)$ ，其中 $P_1 P_a, \dots$ 是其歐氏幾何中的距離（如上圖）。

Lobatchevsky 與 Bolyai 提出非歐幾何的概念，最初並沒有引起數學家的注意。一般的人仍然相信歐氏幾何才是物理世界真正的幾何模型，非歐幾何只不過是邏輯正確的一套演繹體系而已。直到 Riemann 提出廣義的空間的概念，把 Lobatchevsky 與 Bolyai 的非歐幾何納入微分幾何的範圍之內，非歐幾何才被數

學家心安理得的接納下來。Riemann 的微分幾何在 1916 年被 Albert Einstein(1879 ~1955 年) 作為廣義相對論的基礎，人類才發現，歐氏幾何並不必然是物理世界唯一的幾何模型。