

物理報告~~波恩哈德·黎曼

班級:電通 1A

學號:9630011

姓名:謝旻峰



波恩哈德·黎曼生平

他出生於漢諾瓦王國（今德國下薩克森州）的小鎮布列斯倫茨（**Breselenz**）。他的父親弗雷德里希·波恩哈德·黎曼是當地的路德會牧師。他在六個孩子中排行第二。1840 年，黎曼搬到漢諾瓦和祖母生活併進入中學學習。1842 年祖母去世後，他搬到呂訥堡的約翰紐姆（**Johanneum**）。

童年時代的他就已顯露出對數學的不凡天賦。中學時代，黎曼很幸運地遇到一位善於鑑人的老師，發現他對數學的敏銳領悟力，指導他接近科學的經典作品，所以當他進入大學時，他的學識背景已遠超過當時在大學所授各科學科的水準。黎曼是在 1846 年，當他十九歲時進入哥廷根大學的，最初專攻神學和哲學，但是不久就獲得父親的首肯改習他最熱愛的數學。1847 年春，黎曼轉到柏林大學，投入雅戈比、狄利克雷和 **Steiner** 門下。1862 年，黎曼和他的朋友的妹

妹結婚，1863 年，他的女兒誕生於比薩。三年後，也就是 1866 年七月，黎曼因身體健康惡化，在一個叫 Lago Maggiore 地方的小鎮去世，年方四十歲。

波恩哈德·黎曼貢獻

黎曼是 19 世紀極富創造性的數學家之一。他在複變函數論、傅立葉級數、幾何學基礎、素數分布等方面都有重要貢獻。在他的博士論文中，把單值解析函數推廣到多值解析函數，用拓撲學方法研究複變函數論，發展成黎曼曲面論。他的工作為 19 世紀複變函數論的全面發展奠定了基礎。黎曼在 1854 年的就職論文《關於用三角級數表示函數的可能性》中，討論了函數的傅立葉級數及其收斂性問題，並舉例闡明函數的連續性與可微性之間的區別。他的就職演說《關於幾何基礎的假設》已成為著名的歷史文獻，其中發揚了高斯關於曲面的微分幾何研究，闡述了曲率和流形的概念，建立了黎曼空間的概念，為幾何學開拓了更廣闊的研究領域——黎曼幾何學，這些工作後來成為廣義相對論的數學基礎。1859 年，黎曼在德國科學院院刊上發表了題為《論小於給定數的素數個數》的論文，

該文中研究了黎曼 ζ 函數，並將素數分布問題歸結為對該函數的研究，提出了關於黎曼 ζ 函數的 6 個猜想，包括著名的「黎曼猜想」。黎曼廣泛使用解析函數的工具研究數論，開創了解析數論這一新的分支。此外，他在阿貝爾函數、積分論、橢圓函數論、超幾何級數、微分方程等許多方面都有成就。在數學物理方面也發表了一些創造性的論文。

波恩哈德·黎曼理論

黎曼猜想與素數

黎曼猜想傳統的表達式隱藏了這個猜想的真正重要性。黎曼 ζ 函數與素數的分佈有著深厚的連結。Helge von Koch 在 1901 年證明了黎曼猜想等價於素數定理一個可觀的強化：給出任何 $\varepsilon > 0$ ，我們有

$$\left| \pi(x) - \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)} \right| = O(x^{1/2+\varepsilon}),$$

式中 $\pi(x)$ 為 prime-counting 函數， $\ln(x)$ 為 x 的自然對數，以及右手邊用上了大 O 符號^[1]。一個由 Lowell Schoenfeld 提出的非趨向版本，表示黎曼猜想等價於

$$\left| \pi(x) - \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)} \right| < \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \ln(x), \quad \text{for all } x \geq 2$$

黎曼 Zeta-函數與 Bernoulli 數

對於實部大於 1 的複數 s ，我們定義黎曼 zeta-函數如下：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

我們定義 Bernoulli 數為下面函數泰展開式中的係數 B_k ：

$$\frac{s}{e^s - 1} = 1 - \frac{1}{2}s + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} s^{2k} \quad (1)$$

由(1)式，我們容易推出每一個 B_k 都是有理數。

我們可以對 $\zeta(s)$ 作解析延宕 (analytic continuation)，使得 $\zeta(s)$ 成為定義在整個複數平面上的半純函數 (meromorphic function)，並且只有在 $s=1$ 這一點有一個 residue 為 1 的 simple pole。而且經過解析延宕之後， $\zeta(s)$ 滿足下面的 functional equation：

$$\pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right) \zeta(1-s)$$

以上關於 $\zeta(s)$ 的性質，可以在 Ahlfors[1] 書裡找到，這不是這篇文章所要討論的主題。

黎曼 zeta-函數與 Bernoulli 數有如下重要的關係：

定理 1：對任意正整數 $k \geq 1$ ，我們有

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 2^{2k-1} \frac{B_k}{(2k)!} \pi^{2k} \quad (3)$$

如果在(3)式取 $k=1$ ，則由於 $B_1 = \frac{1}{6}$ ，我們得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6} \pi^2 \quad (4)$$

4)式的結果是大數學家 Euler 所證明的，長久以來一直都深深地引人入勝。定理 1 的結果當然比(4)式還要深入許多。定理 1 有幾個不同的證明，一般都不太容易，譬如可以參考 Ahlfors[1] 或 Titchmarsh[2]。這篇文章的目的是要給一個比較淺顯直接的定理 1 的證明，當作學習心得，希望對閱讀這篇文章的讀者會有助益。

現在我們開始證明定理 1

$$\text{令 } f(s) = \frac{1}{e^s - 1} \frac{1}{s^{2k}} (s \in \mathbb{C})$$

考慮下面的積分

$$I(N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=(2N+1)\pi} f(s) ds \quad (5)$$

其中 N 為一正整數。我們不難證明存在一個與 N 無關的正數 $\delta > 0$ ，使得在

圓 $|s| = (2N+1)\pi$ 上，我們有

$$|e^s - 1| \geq \delta$$

所以當 $|s| = (2N+1)\pi$

$$|f(s)| = O((N\pi)^{-2k})$$

因此積分

$$I(N) = O((N\pi)^{-2k+1}) \quad (6)$$

另一方面，對於每一非零的整數 m ， $f(s)$ 在 $s = 2m\pi i$ 這一點有一個 residue 為 $(2m\pi i)^{-2k}$

的 simple pole。而且由(1)式，我們知道 $f(s)$ 在 $s=0$ 這點的 residue

是 $(-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!}$ 。所以積分(5)式同時為

$$I(N) = \sum_{m=1}^N \frac{2}{(2m\pi i)^{2k}} + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!}$$

現在令 $n \rightarrow +\infty$ ，由(6)式和(7)式，我們立刻得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m\pi i)^{2k}} + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} = 0$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 2^{2k-1} \frac{B_k}{(2k)!} \pi^{2k}$$

因此定理 1 得證。

結束本文之前，我們給幾個註腳。到目前為止，人們還不知道如何明確對正奇數 $2k+1$ 表示 $\zeta(2k+1)$ 的函數值。定理 1 只不過是在數論 (Number Theory) 的研究領域裡更一般的問題的一個特例。研究數論的數學家經常必須對某一類的函數，例如橢圓函數， Γ 函數等，在某些特定的點將其函數值明確表示出來。

黎曼幾何古典理論

普遍理論

1. Gauss-Bonnet 理論:緊的 2 維黎曼流形上高斯曲率的積分等於 $2\pi \chi(M)$ 這裡的 $\chi(M)$ 記作 M 的 Euler 特徵數.
2. 拿殊崁入理論(兩個)被稱為黎曼幾何的基礎理論。他們表明每個黎曼流形可以是崁入歐氏空間 $\mathbb{R}^n$.

理論

在所有以下定理中，我們用空間的局部行為(通常用曲率假設表述)來推出空間的整體結構的一些信息，包括流形的拓撲類型和"足夠大"距離的點間的關係。

受限截面曲率

1. 1/4-受限 球定理. 若 M 是完備 n -維黎曼流形，其界面曲率嚴格限制於 1 和 4 之間，則 M 同胚於 n -球。
1. Cheeger's 有限定理. 給定常數 C 和 D ，只有有限個(微分同胚的流形算作一個)緊 n -維黎曼流形，其截面曲率 $|K| \leq C$ 並且直徑 $\leq D$ 。
1. Gromov 的幾乎平坦流形. 存在一個 $\epsilon_n > 0$ 使得如果一個 n -維黎曼流形其度量的截面曲率 $|K| \leq \epsilon_n$ 且直徑 ≤ 1 ，則其有限覆蓋微分同胚於一個零流形.

正曲率

正截面曲率

1. Soul 定理. 若 M 是一個不緊的完備正曲率 n -維黎曼流形，則它微分同胚於 $\mathbf{R}^n$.

2. Gromov 的 Betti 數定理 有一個常數

$C=C(n)$ 使得若 M 是一個由正截面曲率的緊連通 n -維黎曼流形，則它的 Betti 數之和 不超過 C 。

正 Ricci 曲率

1. Myers 定理. 若一個緊黎曼流形有正 Ricci 曲率則它的基本群有限。

1. 分裂定理. 若一個完備的 n -維黎曼流形有非負 Ricci 曲率和一條直線(在任何區間上的距離都極小的測地線)則它等度同胚於一條實直線和一個有非負 Ricci 曲率的完備 $(n-1)$ -維黎曼流形的直積。

1. Bishop's 不等式. 半徑為 r 的球在一個有正 Ricci 曲率的完備 n -維黎曼流形中的體積不超過歐氏空間中同樣半徑的球的體積。

1. Gromov's 緊致性定理. 所有正 Ricci 曲率且直徑不超過 D 的黎曼流形在 Gromov-Hausdorff 度量 下是仿緊的。

標量曲率

1. n -維環不存在有正純量曲率的度量。
1. 若一個緊 n -維黎曼流形的單射半徑 $\geq \pi$ ，則純量曲率的平均值不超過 $n(n-1)$ 。

負曲率

負截面曲率

1. 任何有非正截面曲率的單連通黎曼流形的兩點有唯一的測地線連接。
1. 若 M 是一個有負截面曲率的完備黎曼流形，則基本群的任何可交換子群同構於整數群 $\mathbb{Z}$ 。
1. 設 V^* 是一 $\mathbb{R}$ -rank ≥ 2 的緊致不可約局部對稱空間，設 V 是一截面曲率 $K \leq 0$ 的緊致 C^∞ 黎曼流形，若 $\text{vol}(V) = \text{vol}(V^*)$

$^*)$ ，且 $\pi_1(V) = \pi_1(V^*)$ ，則 V 與 V^* 等距。

負 Ricci 曲率

1. 任何有負 Ricci 曲率的緊黎曼流形有一個離散的等距同胚群。
2. 任何光滑流形可以加入有負 Ricci 曲率的黎曼度量。