

圖一



物理報告

——萊布尼茲——

班級;電通一 A

學號;9630035

姓名;趙哲煒



萊布尼茲(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646-1716)是 17、18 世紀之交
德國最重要的數學家、物理學家和哲學家，一個舉世罕見的科學天
才。他博覽群書，涉獵百科，對豐富人類的科學知識寶庫做出了不可
磨滅的貢獻。

一、生平事蹟

萊布尼茲出生於德國東部萊比錫的一個書香之家，父親是萊比錫大學的道德哲學教授，母親出生在一個教授家庭。萊布尼茲的父親在他年僅 6 歲時便去世了，給他留下了豐富的藏書。萊布尼茲因此得以廣泛接觸古希臘羅馬文化，閱讀了許多著名學者的著作，由此而獲得了堅實的文化功底和明確的學術目標。15 歲時，他進了萊比錫大學

學習法律，一進校便跟上了大學二年級標準的人文學科的課程，還廣泛閱讀了培根、開普勒、伽利略、等人的著作，並對他們的著述進行深入的思考和評價。在聽了教授講授歐幾裏德的《幾何原本》的課程後，萊布尼茲對數學產生了濃厚的興趣。17 歲時他在耶拿大學學習了短時期的數學，並獲得了哲學碩士學位。

20 歲時，萊布尼茲轉入阿爾特道夫大學。這一年，他發表了第一篇數學論文《論組合的藝術》。這是一篇關於數理邏輯的文章，其基本思想是出於想把理論的真理性論證歸結於一種計算的結果。這篇論文雖不夠成熟，但卻閃耀著創新的智慧和數學才華。

萊布尼茲在阿爾特道夫大學獲得博士學位後便投身外交界。從 1671 年開始，他利用外交活動開拓了與外界的廣泛聯繫，尤以通信作為他獲取外界資訊、與人進行思想交流的一種主要方式。在出訪巴黎時，萊布尼茲深受帕斯卡事迹的鼓舞，決心鑽研高等數學，並研究了笛卡兒、費爾馬、帕斯卡等人的著作。1673 年，萊布尼茲被推薦為英國皇家學會會員。此時，他的興趣已明顯地朝向了數學和自然科學，開始了對無窮小演算法的研究，獨立地創立了微積分的基本概念與演算法，和牛頓並蒂雙輝共同奠定了微積分學。1676 年，他到漢諾威公爵府擔任法律顧問兼圖書館館長。1700 年被選為巴黎科學院院士，促成建立了柏林科學院並任首任院長。

1716 年 11 月 14 日，萊布尼茲在漢諾威逝世，終年 70 歲。

二、貢獻

17 世紀下半葉，歐洲科學技術迅猛發展，由於生產力的提高和社會各方面的迫切需要，經各國科學家的努力與歷史的積累，建立在函數與極限概念基礎上的微積分理論應運而生了。微積分思想，最早可以追溯到希臘由阿基米德等人提出的計算面積和體積的方法。1665 年牛頓創始了微積分，萊布尼茲在 1673~1676 年間也發表了微積分思想的論著。以前，微分和積分作為兩種數學運算、兩類數學問題，是分別的加以研究的。卡瓦列裏、巴羅、沃利斯等人得到了一系列求面積(積分)、求切線斜率(導數)的重要結果，但這些結果都是孤立的，不連貫的。只有萊布尼茲和牛頓將積分和微分真正溝通起來，明確地找到了兩者內在的直接聯繫：微分和積分是互逆的兩種運算。而這是微積分建立的關鍵所在。只有確立了這一基本關係，才能在此基礎上構建系統的微積分學。並從對各種函數的微分和求積公式中，總結出共同的演算法程式，使微積分方法普遍化，發展成用符號表示的微積分運算法則。因此，微積分“是牛頓和萊布尼茲大體上完成的，但不是由他們發明的”(恩格斯：《自然辯證法》)。

萊布尼茲是歷史上最偉大的符號學者之一，他所創設的微積分符號，遠優於牛頓所用的符號，對微積分有極大之影響，就如同印度-

阿拉伯數碼的採用，促進算術、代數發展一樣。

當時看的懂萊布尼茲這些文章的人不多，蘇格蘭的克累格〈John Craig〉是最早接受這種新方法的兩個人之一，他在 1685 年採用了萊布尼茲的概念和符號。三十多年後，由於英國人的固執，加上對牛頓的盲目崇拜，而改用牛頓的"流數術"，反而使他們前進的腳步落後於歐洲大陸。另一個是瑞士的雅各·伯努力，他將萊布尼茲的方法加以發揚光大。從那時候起，數學進入一個空前的豐收時期。

三、理論

微積分

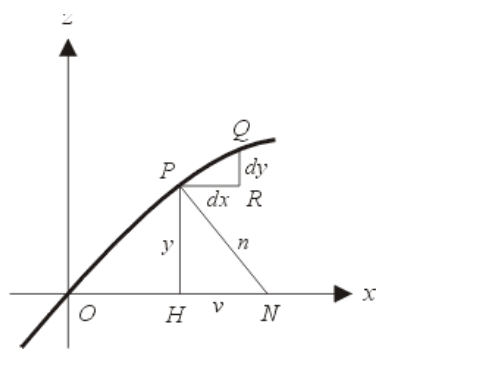
雖然萊布尼茲在巴黎時就得到很多微積分的結果，他在這方面第一篇重要的著作〈求極大小值及切線的新方法〉，卻要到 1684 年才發表在來比錫的一份雜誌《Acta Eruditorum》上。在這篇文章中，他引進了微分式，給了微分式的四則公式：

$$\begin{aligned}d(u \pm v) &= du \pm dv \\d(uv) &= vdu + u dv \\d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{vdu - u dv}{v^2}\end{aligned}$$

並說明得到極值的條件是 $dv=0$ ，得到迴轉點（反曲點）的條件是 $ddv=0$ 。在此之前，微分的計算都是個案的；有了萊布尼茲的微分

公式，則只要知道簡單函數的微分，其他由簡單函數經四則運算合成的複雜函數，其微分也就輕易算得，難怪萊布尼茲會為此新方法感到興奮不已。

第二年(1685 年)，牛頓的一個學生 Craig (John, 1660?~1731 年) 寫了一本數學書，提到萊布尼茲的微分學，認為一定有更多的結果還未發表。再過一年(1686 年)，萊布尼茲在《Acta Eruditorum》發表了〈論一深度隱藏的幾何學及無窮小與無窮大的分析〉一文，為 Graig 的書做書評，並趁機推出更多的萊氏微積分，在這篇文章中，萊氏積分符號 $\int$ 正式登上數學史的舞台。他借用 Graig 所提到有關牛頓的老師 Barrow (Issac, 1630~1677 年) 的一個定理，來展示萊氏微積分學的威力。這個定理用現代的語言來說明是這樣的：如圖一，設曲線通過原點，從曲線上任一點 $P(x,y)$ 作法線交 x 軸於 N ，從 P 點的垂足 H 到 N 的距離 v (稱為次法線)是 x 的函數，其從 O 到 x 的面積為 $\frac{1}{2}v^2$ 。

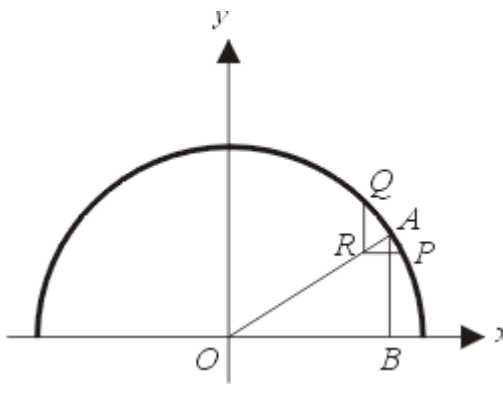


圖一

萊布尼茲的想法是這樣的：在 P 點無窮小鄰近取曲線上一點 Q，以 PQ 為「斜邊」做一「特徵（直角）三角形」 $\triangle PQR$ ，其兩股 PR、QR 為無窮小變化量 dx, dy 。則 $\triangle PQR$ 與 $\triangle PNH$ 相似，因此 $vdx = ydy$ 。從這個「微分」方程式，馬上就得

$$\int_0^x v dx = \int_0^x y dy = \frac{1}{2} y^2 \quad (1)$$

此外，在這篇文章中，他還說圓弧之長及擺線等非代數函數都可用積分的方式表示出來。



圖二

在積分的技巧方面，萊布尼茲是以善用特徵三角形出名的。特徵三角形的想法可溯至 Pascal (Blaise, 1623~1662 年) 處理圓球表面積的工作。如圖二，在半徑為 r 的圓上，取鄰近的兩個點 P 、 Q 。因特徵三角形 $\triangle PQR$ 與 $\triangle AOB$ 相似，所以 $PQ:AO=PR:AB$ 。若以 ds 表弧長 $\widehat{PQ}$ (亦即特徵三角形的斜邊 PQ)，就得 $yds=rdx$ 。因為 $2\pi yds$ 代表弧長 ds 繞 x 軸一圈所得的表面積，其積分

$$\int 2\pi yds = \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2$$

就是圓球的表面積。

萊布尼茲在巴黎時，Huygens 介紹他讀 Pascal 的文章；萊氏在研讀 Pascal 的這段證明時，突然靈光一閃，發現在一般曲線的場合，法線代替了半徑，也可以算得旋轉體的體積：如圖一所示。從兩個三角形的相似，我們也可以得到 $yds = ndx$ ，因此

$$\text{旋轉體表面積} = \int 2\pi yds = \int 2\pi ndx \quad (2)$$

這兩個三角形相似的另一用法就是(1)式。由於

$$v = y \frac{dy}{dx} \quad (3)$$

所以爲了求得一函數 $v(x)$ 的積分，我們只要找到 $y=f(x)$ ，使得(3)式成立就好了。譬如， $v(x)=x^n$ 時，我們可以試 $f(x)=bx^m$ 。則因

$$\frac{dy}{dx} = mbx^{m-1},$$

$$y \frac{dy}{dx} = mb^2 x^{2m-1} = v(x) = x^n$$

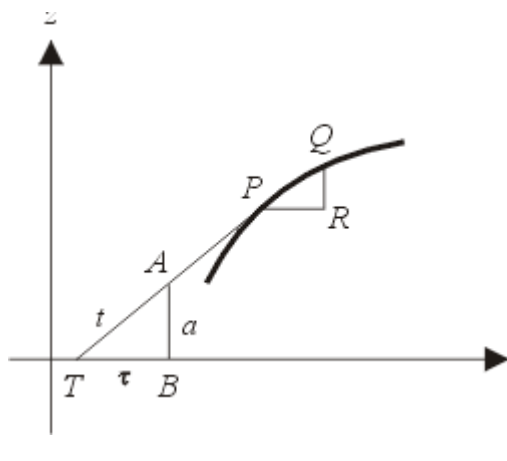
所以取 $m = \frac{1}{2}(n+1)$ ， $b^2 = \frac{1}{m}$ 就好了。如此就得

$$\int x^n dx = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} b^2 x^{2m} = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

(3)式與(1)式合起來看，我們就得

$$\int y \left(\frac{dy}{dx} \right) dx = \int y dy$$

這正是積分中變數代換的一個例子。



圖三

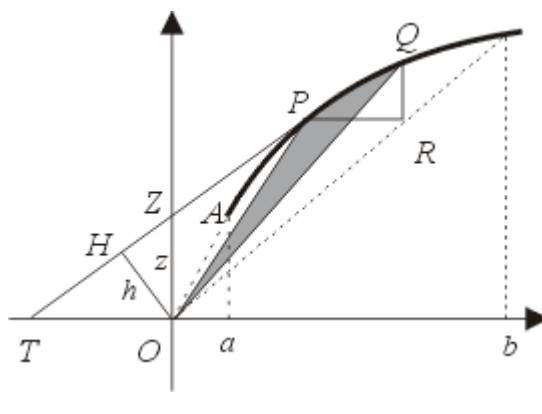
特徵三角形還可以和其他的三角形相似。譬如在圖三中，PT 為切線，AB 為高度固定為 a 。由 $\triangle PQR$ 與 $\triangle TRB$ 兩三角形相似，就得

$$ds : dx : dy = t : \tau : a$$

因此，譬如說，我們可以得到

$$\int ds = \frac{1}{a} \int t dy$$

而把計算弧長的問題轉變為計算面積的問題。



圖四

然而下面這種相似三角形取法更有用。如圖四，設切線交 y 軸於 $Z(0,z)$ ，從 O 到切線的垂足為 H ，垂線 OH 長為 h 。從 $\triangle PQR$ 與

$\triangle OZH$ 兩三角形的相似，可得 $hds=zdx$ ，亦即

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2}hds = \frac{1}{2}zdx \quad (5)$$

因此由

$$\int_a^b ydx = \triangle OBb + \text{扇形} OAB - \triangle OLa$$

就得

$$\int_a^b ydx = \frac{1}{2}[(xy)|_a^b + \int_a^b zdx] \quad (6)$$

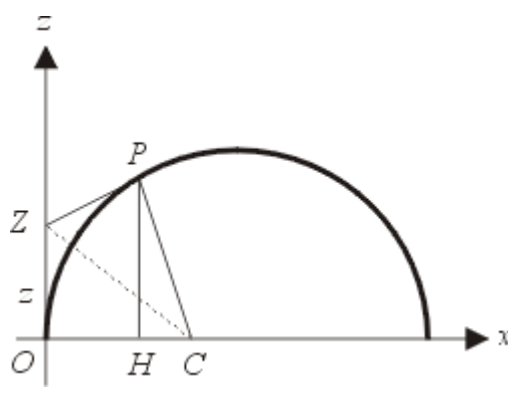
因為

$$z = y - x \frac{dy}{dx} \quad (7)$$

把其中的 y 做一次分部積分 (integration by parts)，(6)式就變成

$$\int_a^b ydx = (xy)|_a^b - \int_a^b xdy \quad (8)$$

這正是我們常見的分部積分公式。



圖五

(6)、(7)兩式的合用是萊布尼茲計算積分的主要方法。他宣稱由此可以得到所有前人已知的積分；圓周率的計算是這種方法成功的例證。

如圖五，圓的方程式為 $y = \sqrt{2x - x^2}$ ，

$$z = y - x \frac{dy}{dx} = y - x \frac{1-x}{y} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

由此可得 $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$ ，因此

$$\begin{aligned} \int_0^x y dx &= \frac{1}{2}(xy)|_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x z dx \\ &= \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xz - \frac{1}{2} \int_0^x x dx \\ &= \frac{1}{2}x(y+z) - \int_0^x \frac{z^2}{1+z^2} dz \\ &= \frac{1}{2}x(y+z) - \int_0^x (z^2 - z^4 + z^6 - \dots) dz \\ &= \frac{1}{2}x(y+z) - \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \dots \right) \end{aligned} \quad (9)$$

取 $x=1$ ，就得以萊布尼茲為名的著名公式

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 y dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad (10)$$

若將(9)式重寫成

$$z + \int_0^z x dx - \frac{1}{2}x(y+z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots$$

而且注意到 $z (= z \cdot 1)$ 正好是四邊形 ZOCP (看成是兩個全等三角形

$\triangle ZOC$ 、 $\triangle ZPC$ 之和)的面積， $\frac{1}{2}x(y+z)$ 是梯形 ZPHO 的面積。

兩者相減，再加上曲線 OP 下的面積 $\int_0^z y dx$ ，等式的左邊正是扇形 COP 的面積，而此面積為

$$\frac{1}{2}\angle PCO = \angle ZCO = \tan^{-1}z$$

如此我們就得到反正切函數的展開式

$$\tan^{-1}z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots \quad (11)$$

[請注意：牛頓與萊布尼茲得到 $\tan^{-1}z$ 的展開式都不是先知道其微分

為 $\frac{1}{1+z^2}$

在牛頓、萊布尼茲之前，微分及積分的計算都是個案的。萊氏不但提供了微分的方法，也提供了積分的方法，而積分的公式，實際上都是

利用特徵三角形所得的「微分」方程式轉過來的；也就是說他體會到求積的問題可從曲線的切線性質著手，而且也善於應用微積分基本定理——他曾於 1693 年在《Acta Eruditorum》發表微積分基本定理。此外他的微積分符號不但使人很快了解微積分的內涵，也使人在微積分的計算上得心應手，因此萊布尼茲的微積分掩蓋了牛頓的，而成為日後微積分學的主流。有了這些貢獻，萊布尼茲自然也成了微積分的創始人之一。