物　　　　　理　　　　　報　　　　　告

高斯

班級:電通系 1A

學號:9630038

姓名:林洽琮

高斯－被譽爲「數學王子」的德國大數學家，物理學家和天文學家。

德國大數學家高斯（Carl Friedrich Gauss 1777-1855）是德國最偉大，最傑出的科學家，如果單純以他的數學成就來說，很少在一門數學的分支裡沒有用到他的一些研究成果。

貧寒家庭出身

高斯的祖父是農民，父親除了從事園藝的工作外，也當過各色各樣的雜工，如護堤員、建築工等等。父親由於貧窮，本身沒有受過什麼教育。

母親在三十四歲時才結婚，三十五歲生下了高斯。她是一名石匠的女兒，有一個很聰明的弟弟，他手巧心靈是當地出名的織綢能手，高斯的這位舅舅，對小高斯很照顧，有機會就教育他，把他所知道的一些知識傳授給他。而父親可以說是一名”大老粗”，認爲只有力氣能掙錢，學問對窮人是沒有用的。

高斯在晚年喜歡對自己的小孫兒講述自己小時候的故事，他說他在還不會講話的時候，就已經學會計算了。

他還不到三歲的時候，有一天他觀看父親在計算受他管轄的工人們的周薪。父親在喃喃的計數，最後長嘆的一聲表示總算把錢算出來。

父親唸出錢數，準備寫下時，身邊傳來微小的聲音：「爸爸！算錯了，錢應該是這樣.....。」

父親驚異地再算一次，果然小高斯講的數是正確的，奇特的地方是沒有人教過高斯怎麼樣計算，而小高斯平日靠觀察，在大人不知不覺時，他自己學會了計算。

另外一個著名的故事亦可以說明高斯很小時就有很快的計算能力。當他還在小學讀書時，有一天，算術老師要求全班同學算出以下的算式：

$1 + 2 + 3 + 4 + ...+ 98 + 99 + 100 = ?$

在老師把問題講完不久，高斯就在他的小石板上端端正正地寫下答案 5050，而其他孩子算到頭昏腦脹，還是算不出來。最後只有高斯的答案是正確無誤。

原來 $1 + 100 = 101$

$2 + 99 = 101$

$3 + 98 = 101$

.

.

.

$50 + 51 = 101$

前後兩項兩兩相加，就成了 50 對和都是 101 的配對了

即 $101 \times 50 = 5050$。

按：今用公式

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

表示 $1 + 2 + ... + n$

高斯的家裡很窮，在冬天晚上吃完飯後，父親就要高斯上床睡覺，這樣可以節省燃料和燈油。高斯很喜歡讀書，他往往帶了一捆蕪菁上他的頂樓去，他把蕪菁當中挖空，塞進用粗棉

捲成的燈芯，用一些油脂當燭油，於是就在這發出微弱光亮的燈下，專心地看書。等到疲勞和寒冷壓倒他時，他才鑽進被窩睡覺。

高斯的算術老師本來是對學生態度不好，他常認爲自己在窮鄉僻壤教書是懷才不遇，現在發現了「神童」，他是很高興。但是很快他就感到慚愧，覺得自己懂的數學不多，不能對高斯有什麼幫助。

他去城裡自掏腰包買了一本數學書送給高斯，高斯很高興和比他大差不多十歲的老師的助手一起學習這本書。這個小孩和那個少年建立起深厚的感情，他們花許多時間討論這裡面的東西。

高斯在十一歲的時候就發現了二項式定理（$(x+y)^n$的一般情形,這裡 n 可以是正負整數或正負分數。當他還是一個小學生時就對無窮的問題注意了。

有一天高斯在走回家時，一面走一面全神貫注地看書，不知不覺走進了布倫斯維克（Braunschweig）宮的庭園，這時布倫斯維克公爵夫人看到這個小孩那麼喜歡讀書，於是就和他交談，她發現他完全明白所讀的書的深奧內容。

公爵夫人回去報告給公爵知道，公爵也聽說過在他所管轄的領地有一個聰明小孩的故事，於是就派人把高斯叫去宮殿。

費迪南公爵（Duke Ferdinand）很喜歡這個害羞的孩子，也賞識他的才能，於是決定給他經濟援助，讓他有機會受高深教育，費迪南公爵對高斯的照顧是有利的，不然高斯的父親是反對孩子讀太多書，他總認爲工作賺錢比去做什麼數學研究是更有用些，那高斯又怎麼會成材呢？

高斯的學校生涯

在費迪南公爵的善意幫助下，十五歲的高斯進入一間著名的學院（程度相當於高中和大學之間）。在那裡他學習了古代和現代語言，同時也開始對高等數學作研究。

他專心閱讀牛頓、歐拉、拉格朗日這些歐洲著名數學家的作品。他對牛頓的工作特別欽佩，並很快地掌握了牛頓的微積分理論。

1795 年 10 月他離開家鄉的學院到哥庭根（Gottingen）去念大學。哥庭根大學在德國很有名，它的豐富數學藏書吸引了高斯。許多外國學生也到那裡學習語言、神學、法律或醫學。這是一個學術風氣很濃厚的城市。

高斯這時候不知道要讀什麼系，語言系呢還是數學系？如果以實用觀點來看，學數學以後找生活是不大容易的。

可是在他十八歲的前夕，現在數學上的一個新發現使他決定終生研究數學。這發現在數學史上是很重要的。

我們知道當 $n \geq 3$ 時，正 n 邊形是指那些每一邊都相等，內角也一樣的 n 邊多邊形。

希臘的數學家早知道用圓規和沒有刻度的直尺畫出正三、四、五、十五邊形。但是在這之後的二千多年以來沒有人知道怎麼用直尺和圓規構造正十一邊、十三邊、十四邊、十七邊多邊形。

還不到十八歲的高斯發現了：一個正 n 邊形可以用直尺和圓規畫出當且僅當 n 是底下兩種形式之一：

（1）$n = 2^k$　$k = 2, 3, \ldots$

（2）$n = 2^k \times$ (幾個不同「費馬素數」的乘積)

「費馬素數」是外表像 $F_k = 2^{2^k} + 1$ 的質數

$k = 0, 1, 2, \ldots$

十七世紀時法國數學家費馬（Fermat）以爲公式 $F_k = 2^{2^k} + 1$ 在 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ 給出素數。（事實上，目前只確定 F_0, F_1, F_2, F_4 是質數，F_5 不是）。

高斯用代數方法解決了二千多年來的幾何難題，而且找到正十七邊形的直尺與圓規的作法。他是那麼的興奮，因此決定一生研究數學。據說，他還表示希望死後在他的墓碑上能刻上一個正十七邊形，以紀念他少年時最重要的數學發現。

1799 年高斯呈上他的博士論文，這論文證明了代數一個重要的定理：任何一元代數方程都有根。這結果數學上稱爲”代數基本定理”。

事實上在高斯之間有許多數學家認爲已給出了這個結果的證明，可是沒有一個證是嚴密的，高斯是第一個數學家給出嚴密無誤的證明，高斯認爲這個定理是很重要的，在他一生中給了一共四個不同的證明。高斯沒有錢印刷他的學位論文，還好費迪南公爵給他錢印刷。

二十歲時高斯在他的日記上寫，他有許多數學想法出現在腦海中，由於時間不定，因此只能記錄一小部份。幸虧他把研究的成果寫成一本叫＜算學研究＞，並且在二十四歲時出版，這書是用拉丁文寫，原來有八章，由於錢不夠，只好印七章，這書可以說是數論第一本有系統的著作，高斯第一次介紹”同餘”這個概念。

高斯在數學上的卓越貢獻

１・代數基本定理

高斯在數學研究中有許多重大建樹，第一個重大建樹出現在他１７９９年發表的博士論文中。在這篇論文中，他第一次嚴格證明了“代數的基本定理”（Fundamental theorem of algebra）：即任何一元 n 次方程式，至少有一個根。如果這個根是 a，用（x-a）去除方程式，就得到一個（n-1）次方程式，而這個（n-1）次方程式，也至少會有一個根。這樣推下去，就證明一元幾次方程式就一定會有幾個根，在這裡 n 是個正整數。爲了求出這個基本代數定理的第一個證明，高斯還承認了負數的概念，鞏固了負數的地位，並於１８３１年建立了負數代數學。

這是一項了不起的證明，因爲人們雖然在很早的時候就知道怎樣求一元一次方程式的根，並於１５００年前後又陸續找到了求一元二次、三次和四次方程根的公式，但從那以後的三百年內，誰也沒能求出一元五次方程的根來。多次方程有沒有根？這確實是代數學中的一個基本重大的問題。高斯證明的這條代數基本定理，明確地告訴我們不管什麼樣的代數方程式都有根。從而給決心求出任何方程根來的人們，樹立了堅定的信念；而高斯探討代數基本定理的方法，也開創了探討代數學中整個存在性問題的新途徑，爲數學的發展開闢了更廣闊的前景。

２・發展數論

高斯的第二大建樹，是他在１８０１年２１歲時，自費出版了《算學研究》(Disquisitiones Arithmeticae）一書，開創近代數學中數論研究的新紀元。這書可說是數論第一本有系統的著作，高斯第一次介紹“同餘”(Congruent)這個概念。此外還有數論上很重要的“二次互逆定理”（Law of Quadratic reciprocity）——高斯稱爲“ 數論的酵母”；這定理是在描述一對素數的美麗關係，高斯在十八歲時重新發現這個關係，並給了第一個證明，他認爲這是數論的“寶石”，所以他一生給出五個不同證明。

３・非歐幾何學的創立

非歐幾何學，就是不同於歐幾里德幾何學的幾何學。非歐幾何的創作，是對《幾何原本》裡的“第五公設”產生質疑；“第五公設”是這樣的：“若兩條直線與第三條直線相交，且兩個同側內角之和小於兩直角，則把這兩條直線無限延長時，它們一定在那兩直角一側相交。”爲了證明這一公設，在《幾何原本》問世後的二千多年間，人們一直在兩條道路上進行探索。一條是企圖用更爲不證自明的命題來代替它，另一條是企圖用《幾何原本》中的其他四個公設和五個公理推導出它來。如果做到了這兩點中的一點，第五公設就將無可懷疑地成爲一條定理，但是卻毫無結果。因此，非歐幾何認爲平行公設是一個獨立的斷言，所以可能採用一個完全相反的公設而發展一種全新的幾何。

非歐幾何是高斯未發表的論文——因爲高斯常常要求他的作品達到既優美又不失嚴密的精確巔峰才肯發表；所以他的作品中發表的相當少。就非歐幾何學而言，高斯早在１８１６就已得到結果，但他卻終生沒有發表。這一方面是因爲他要尋求其結果的簡明嚴密，另一方面，他也確實害怕傳統勢力的的諷刺，所以我們所知道高斯在非歐幾何上的作品，乃是蒐集自他寫給友人的信件以及１８１６和１８２２年的 Gottingische Gelehrte Anzeigen 中兩篇短評及他去世後在他的論文中找到一些１８３１年的札記而來的。

４・開創微分幾何學

高斯從１８１６年起，就把大部份的心力投注在測地學和地圖測繪的研究工作上；在這一方面，他發表了很多論文，並因此起了他對微分幾何的興趣，從而寫出了１８２７年所發表的論文：《曲面概論》（Disquistiones Generales circa Superficies Curvas）。除了這一篇研討三度空間中的曲面之微分幾何論文，高斯還引進了一種全新的概念，那就是把曲面本身視爲同一個空間。正是這個概念，再經過黎曼的延拓，終於爲非歐幾何開創了嶄新的遠景。

高斯對曲率的定義是對指標曲面的曲率所做一種延拓，高斯並證明出，若兩曲面彼此可賦予一對一對應，且若兩曲面上各對應點的距離元素相等，則我們稱之爲等距（isometric）的曲面，必然擁有同樣的幾何。特別地，它們在對應點必然具有相等的全曲率。這樣延伸下來，可以導出一個系理：如果我們想將某曲面的一部份（保持距離地）移到另一部份的上面，則一個必要條件便是這個曲面的曲率是常數。因此，一個球面（曲率爲半徑平方的倒數）上的一部份，可移到另一部份上而不須加以扭變，但這對橢圓球面就行不通了（無論如何，只要適當安置一個曲面或其部份映成另一部份即可）。

高斯在１８２７年論文中所研究的另一個重大主題是；在曲面上找測地線。他並證明了一個關於曲率和測地線所圍成的三角形定理，其中可說明曲率在一個測地（線）的三角形積分值，等於三角形（內）角和多出一百八十度的超量，或角和少於一百八十度的缺量。此外，高斯在微分幾何論文中，曾討論將一曲面保角地映成另一曲面的解析問題，更於１８２２年贏得丹麥皇家科學會提供的獎。所以我們說，高斯在微分幾何方面的創見無疑是微分幾何學本身的一座里程碑。不僅如此，高斯的作品中更蘊涵著：當曲面自身視同空間時，曲面上確有非歐幾何存在，高斯是否對曲面幾何的這種非歐式銓釋是否有先見之明，我們就不得而知了。