一、生平

Laplace,Pierre-Simon （1749--1827）
拉普拉斯，P.-S. (Laplace,Pierre-Simon)
1749 年 3 月 23 日生於法國諾曼底地區的博蒙昂諾日(Beaumont-en-Auge)；1827 年 3 月 5 日卒於法國巴黎。

皮埃爾-西蒙・拉普拉斯(Pierre-Simon de Laplace,1749--1827)侯爵不是天生的農夫，也並非蓋棺論定爲勢利小人。然而地進入人數不多的第二等級的輝煌經歷，就包含在上述二者之間。正是從這個近似的觀點來看，他作爲一個人性的標本是最耐人尋味的。
作爲一個數理天文學家，拉普拉斯被公正地稱爲法國的牛頓(Newton)；作爲一個數學家，他可以被看作現代型式概率論的奠基人。在爲人方面，他對高尚的職業必定使人品格高尚這種教育學的迷信也許是個最明顯的反駁。但儘管拉普拉斯有那麼多可笑的缺點：貪戀頭銜，政治上軟弱巴結，在公眾尊敬中心不斷變化的形勢下總想出風頭，可是在他的品格中確實有一些真正偉大的因素。我們不能完全相信他爲真理無私獻身的自我表白，我們可以譏笑他的謹慎，懷著這種謹慎，他留下簡潔的遺言:「我們知道的不多，我們未知的無限。」這是試圖把牛頓(Newton)那個海濱玩耍的孩子嵌進一個簡短的警句。但是，我們不能否認，慷慨大方地對待無名初學者的拉普拉斯絕不是那種慣要花招，令人生厭的政客。他曾經爲幫助一個年輕人而做出犧牲。

對於拉普拉斯早年的情況，人們知道得很少。他的父母是法國卡爾瓦多(Calvados)省博蒙昂諾日(Beaumont-en-Auge)的農民。皮埃爾-西蒙 1749 年 3 月 23 日就出生在那裡。拉普拉斯童年和青年時代的情況搞不清楚是由於他本人的勢利，他爲自己父母的地位卑微羞恥得要命，以至千方百計地隱瞞自己的農民出身。

由於富裕鄰居的幫助，拉普拉斯得到了出頭的機會。大概，這是當他在鄉村學校裡顯示出卓越才能的時候。據說，他最初的成功是在神學辯論中取得的。如果這事當真，對於他成熟以後那頗有些敢做敢爲的無神論倒是個有趣的前奏。拉普拉斯很早就喜歡數學。博蒙有一所軍事學院，他曾作爲走讀生在那裡學習，據說還一度在那裡教過數學。一個傳說講，這個年輕人的非凡記憶力比其數學才能更多地吸引了人們的注意，因而得到有影響的人熱誠的推薦信，帶著上了巴黎。從此 18 歲的拉普拉斯便永遠地擦去了靴子上的博蒙污泥，開始尋求他的好運氣。他對自己的能力估價很高，但並不過分。年輕的拉普拉斯帶著正當的自信打入巴黎，來征服數學界了。到達巴黎，拉普拉斯便去拜訪達朗貝爾(D'Alembert)，並遞上了推薦信。結果他卻沒有受到接待。達朗貝爾(D'Alembert)對這種單靠名流引薦而來的年輕人不感興趣。拉普拉斯以他那樣年輕難得具有的眼光立即看出了麻煩的所在。回到住處，他使給達朗貝爾(D'Alembert)寫了一封精彩論說力學幾何一般原理的信。他成功了，達朗貝爾(D'Alembert)在邀請拉普拉斯去訪問的回信中寫道："你看，我對你的推薦信根本沒有足夠重視。你本來不需要什麼推薦。你的自我介紹更好些。那對我就夠了，我應該給你幫助。"幾天之後，由於達朗貝爾(D'Alembert)的幫助，拉普拉斯便被任命爲巴黎軍事學院的數學教授了。

拉普拉斯現在投身到了他的畢生事業之中，詳細應用牛頓(Newton)萬有引力定律於整個太陽系的研究。如果此外他沒做過任何別的事情，他本來會是一個更偉大的人物。拉普拉斯打算成爲什麼樣的人呢？他 1777 年 27 歲時曾在給達朗貝爾(D'Alembert)的一封信中作過描繪。他給自己描出的圖畫是在自我分析方面做出的真實與想像人物的一種最奇特的混合體。

"我研究數學一向是出於興趣，而不是爲了想得到虛名。"他聲言：「我最大的樂事是查考發明家的經歷，了解他們克服所遇到的障礙時表現出來的才智。隨後我把自己擺到他們的位置上，問一問，爲了越過這些同樣的障礙，我會怎麼辦？雖然這種代換在絕大多數情況下總是使自己感到羞愧，但是慶賀他們成功的喜悅又充分地報償了這種小小的羞愧感。如果我有幸能夠在他們的成果之上再增添些什麼，我把這個成績完全歸功於他們開頭的努力。我完全相信，他們處在我的位置會遠比我做得更好。」

拉普拉斯處理的那個問題的複雜性與難度無法給從未接觸過類似問題的任何人說清楚。在介紹拉格朗日(Lagrange)的時候，我們談到過三體問題。拉普拉斯要解決的與那個類似，但又更高級些。他必須根據牛頓(Newton)定律求出太陽系各行星彼此之間和行星與太陽之間的切向與徑向吸引，攝動的聯合作用。儘管土星的平均運動明顯地穩定減慢，它是會飄逸到太空去，還是會繼續作爲太陽系大家庭的一員呢？或者說，木星和月亮的加速會最終導致它的一個落進太陽裡，一個撞到地球上嗎？這些攝動的效應是累加的，散逸的，還是週期的，守恆的？這些，以及類似的謎；都是一個重大問題的細節。這個問題就是：太陽系是穩定的還是不穩定的。假定牛頓(Newton)萬有引力定律確實普遍適用，並且是唯一的支配行星運動的規律。

拉普拉斯朝著解決這個大問題邁出第一個重要步驟是在 1773 年，那時他 24 歲。他證明了，各個行星與太陽的平均距離是恆定在一定的微小週期變動之內的。

當拉普拉斯著手研究穩定性的問題時，專家們持觀望態度的就算是最好的了。牛頓(Newton)本人就相信，爲了維持太陽系的秩序，防止它毀滅或瓦解，神的調節可能常常是必要的。其他人，像歐拉，因爲對月球運動理論的難度印象很深，而有點懷疑行星及其衛星的運動是否能靠牛頓(Newton)的假說計算出來。照任何公平合理的推測來說，涉及的力確實太多，它們的相互作用也太複雜。在拉普拉斯證明太陽系的穩定性之前，人們都以爲這辦不到。

爲了回答讀者無疑已經產生的異議，這裡可以說明，拉普拉斯給穩定性問題作出的解答，只有對他和牛頓(Newton)想像的高度理想化的太陽系才能差強人意。其它因素中的潮汐摩擦(作用像個每日循環的制動器)就被忽略了。自(天體力學)出版以來，我們又掌握了許多拉普拉斯完全不知道的關於太陽系的知識。而如果說，對於實際的太陽系，與拉普拉斯的理想模型相對而言，穩定性的問題仍然懸而未決，也許並不過分。不過，天體力學的專家們可能不同意，而一個公認的觀點又只能出自他們。

由於各人的性情不同，有些人覺得拉普拉斯那樣永恆的太陽系一次又一次永遠在其複雜軌跡上兜圈子的想法像無盡頭的夢魘一樣太沉悶。對這些人，近代有一種安慰說，太陽也許將在某一天作爲一顆新星爆發。那時，穩定性就不會再使我們煩惱了，因爲大家都將一下子完全變成氣體。

由於這個光輝的開端，拉普拉斯剛剛 24 歲便獲得了他經歷中的第一個重大榮譽：科學院通訊院士資格。關於他後來的科學活動，傅里葉(Fourier)作了概括：「拉普拉斯給了自己全部工作一個固定的方向，他從未由此偏離目標；冷靜沉著的觀察始終是他天才的主要特色。」當他開始研究太陽系的時候]他已經處在數學分析的最前沿，了解其中所有最巧妙的東西，因而沒有任何人比他更勝任擴展這個研究領域。他解決了天文學的一個重要問題[報到科學院是在 1773 年，並且決定把自己的全部才智獻給數理天文學，他是註定要使它完善起來的。他對自己的偉大工程深思熟慮，並以科學史上無雙的堅韌，用自己的畢生精力去完成它。課題的龐大滿足了他天才的正當自尊心。

(天體力學)把拉普拉斯在天文學方面的全部成果組合成一個有條理的整體，它是在 26 年之間陸續出版的。1799 年卷，內容有行星的運動，行星(做爲旋轉體)的形狀和潮汐，按著在 1802 年和 1805 年又出版了兩卷繼續這方面的研究，最後以 1823-1825 年撰寫的第五卷宣告完成。書中的數學說明極其簡略，偶爾也顯得笨拙。拉普拉斯的興趣在於結果，而不在於結果如何獲得。爲了迴避把複雜的數學依據壓縮成簡潔易懂形式的困難，他常常除了結論之外完全省略，而用上個樂觀的斷語" est aise a voir"(顯而易見)。他本人也時常得花費幾小時，有時是幾天時間的苦功才能恢復那些賴以見到結論的論證。甚至聰明的讀者很快就養成了一見這個著名的用語就要叫苦的習慣。因爲他們知道，說不定又要進行一個星期的盲目探索了。

一個比較易讀的，介紹(天體力學)主要結論的著作是 1796 年問世的，那就是不朽的(Exposition du systeme du monde)(宇宙體系論)。這本書被稱爲拉普拉斯完全不用數學的傑作。在這部著作中，就像在關於概率的那部論著(1820 年，第三版)前的長篇非數學導言(四開，長 153 頁)中一樣，拉普拉斯顯示出他不僅是個大數學家，也是個幾乎同樣偉大的作家。任何一個人想對概率論範圍和魅力做一粗略了解，而又不想涉及那些唯有數學家才明白的術語，那沒有比讀拉普拉斯的(導言)更好的了。從拉普拉斯寫這部著作以來，人們又作了許多工作，特別是近年來，在概率論的基礎方面。但是他的解說仍然是第一流的，至少是對整個學科的一種基本觀點的完美措辭。幾乎不用說，這些理論還不完善，甚至只是一個看起來彷彿還沒有開始的開端下一代人可能把它全都推倒重來。

有一件拉普拉斯天文學研究約有趣小事可以順便提一下：關於太陽系起源的著名星雲假說。拉普拉斯(只是半認真地)在一本筆記上提出了這個假說，很明顯，他不了解康德(Kant)已經早於他提了出來。他的數學知識對於進一步的系統研究是不夠的。他的假說直到本世紀金斯重新對它進行討論時才有了科學意義。

對於拉普拉斯的大多數同時代人和直接追隨者來說，他的地位比拉格朗日(Lagrange)要高。這裡一部分原因是拉普拉斯稿的問題重大，論證太陽系是個龐大的永動機。毫無疑問，這個莊嚴的課題本身實質上是虛幻的，對於實際的物質世界，在拉普拉斯那個時代，甚至在我們今天，人們了解得都不足以給那個問題以任何真實的意義，而把數學發展到能夠處理我們目前已有的大量複雜資料也許還得多年以後。數理天文學家們無疑會繼續運用宇宙或太陽系的理想模型，並且繼續源源不斷地向我們發佈或是鼓舞人心，或是令人沮喪的關於人類命運的公報。但是最終，他們研究工作的副產品，他們設計的純粹數學工具的完善，將是他們對科學(作爲臆測宣傳的對立物)發展的真正永久的貢獻。拉普拉斯的情況正是這樣。

如果覺得上述看法有點太生硬，那不妨考慮一下(天體力學)的情況。今天除了學究式的數學家，還有人真正相信拉普拉斯以理想化的圖景代替無限複雜的實際情況而得出的關於太陽系穩定性的結論可靠嗎？也許還有許多人相信。但是確實沒有任何一個數學物理學工作者懷疑拉普拉斯爲解決他的課題而發展的那些數學方法的效能。

另舉一個例子，勢的理論，它現在比拉普拉斯當初設想的意義更加重大。離開這種數學理論要想學習電磁學那幾乎是連入門也辦不到。由這個理論還派生出一個有力的數學分支，邊值問題。今天對自然科學的意義比整個牛頓(Newton)萬有引力理論遠大。勢的概念是個頭等的數學妙想，它使得人們有可能研究那些捨此絕無門徑的自然科學問題。

牛頓(Newton)那一章描述流體運動和拉普拉斯方程聯繫時用到的那個函數 μ 。在那裡函數 μ 是"速率勢"；如果問題是關於牛頓(Newton)萬有引力的，μ 就是"萬有引力勢"。把勢引入流體運動、萬有引力、電磁學理論和其它一些領域是數理物理學中空前巨大的進展之一。它使得人們能夠把具有兩三個未知數的偏微分方程化爲一個未知數的微分方程。

1785 年，36 歲的拉普拉斯獲得了科學院正式院士的資格。這個榮譽在一個科學家的經歷中是很重大的，而在拉普拉斯作爲知名人物的經歷中，1785 年還作爲一個意義更加重大的里程碑聳立著。在那一年，拉普拉斯得到了獨一無二的榮譽：在軍事學院對一個非凡的 16 歲畢業生進行考試。這個年輕人註定要打亂拉普拉斯的計劃，把這個公開聲明獻身數學的學者拖入政治的泥沼之中。這個年輕人就是拿破侖·波拿巴(Napoleon Bonaprte,1769-1821)。

拉普拉斯平安地度過了大革命，正像人們看到的，他比較安穩地經歷了各種事變。但是，根本沒有任何一個不安分、地位顯赫的人能完全逃避危險。也許正像德·帕斯特萊(De Pastoret)在他的頌詞裡談到的，拉普拉斯和拉格朗日(Lagrange)二人所以能夠逃脫斷頭台，只是因爲需要他們計算火炮的彈道和指導製造硝石以配製黑火藥。他倆都不曾像某些不太必需的學者那樣被趕去受苦，也沒有大意到像他們不幸的朋友孔多塞那樣爲了一份貴族煎蛋餅而害了自己。孔多塞不知道一份標準的煎蛋餅要用幾個雞蛋，他要了一打。真廚師問他職業是什麼。"木匠。" "把手拿給我看看。你根本不是木匠！"拉普拉斯的親密朋友孔多塞的生命就這樣結束了。他或者是在監獄裡被毒死了，或者是被迫自殺了。

拿破侖對拉普拉斯真是無所不予，包括內政大臣的職位---關於這個後面還要請到。拿破侖的所有各種動章都掛到了這位萬能數學家的胸前，包括榮譽軍團大十字勳章和留尼汪勳章。拉普拉斯還被封爲帝國的伯爵。而當拿破侖倒台的時候他又做了什麼呢？簽署流放他這位"恩人"的命令。復辟後，拉普拉斯毫無困難把他的忠誠轉給路易十八，尤其是由於此時他是以德·拉普拉斯侯爵的身份坐在貴族院裡了。路易看出了這個擁護者的長處，於 1816 年任命拉普拉斯爲一個委員會的主席負責改革巴黎理工學校(Ecole
Polytechnique)。

拉普拉斯政治才能最完美的體現是在他的科學著作裡。按照動盪的政治潮流修飾科學而不露形跡是需要真正才能的。(宇宙體系論)第一版題獻給五百人院，以如下的莊重語句作爲結束:"天文科學的最大恩惠乃是消除由於對我們與大自然真實關係的愚昧而產生的謬誤，這些謬誤由於社會秩序必須唯一地依賴這些關係而更加致命。真理和正義是天文科學永遠不變的基礎。讓所謂爲了更好地保障人們的幸福，欺騙或奴役他們有時可能有益的危險格言見鬼去吧!不幸的經歷早已證明,違反這些神聖的定律是絕不會不受懲罰的。"1824 年，這段話被德・拉普拉斯侯爵去掉了，用來代替的是:"讓我們小心地保存並不斷增加這高深的知識的寶藏,這是有思維的生物的快樂口它們對航海與地理學顯示了重要作用，但它的最大的恩惠乃是驅散了由天相引起的恐怖，消除了由於對我們與大自然真實關係的愚昧而產生的謬誤。如果科學的火炬被熄滅，這些謬誤將立刻重新出現。"就感情的高尚而言，在這兩段莊重的格言之間是沒什麼可挑揀的。

在拉普拉斯分類帳的借方記上這些已經足夠了。最後這段摘錄又實在令人想到拉普拉斯勝過所有朝臣的一種品質 他在自己的真正信仰受到詰問時表現出道義的勇氣。拉普拉斯爲了《天體力學》而頂撞拿破侖的一段故事便顯示了他作爲真正的數學家的風骨拉普拉斯把這部著作的一份抄本獻給拿破侖。拿破侖想逗惱拉普拉斯，便抓住一個明顯的疏忽責備他。"你寫了這部關於宇宙體系的巨著，卻一次也沒有提到宇宙的創造者。"拉普拉斯竟回嘴說："陛下，我根本不需要那個假設。"當拿破侖把這個回答告訴拉格朗日(Lagrange)時，後者說"啊！那可是個美妙的假說，它可以解釋那麼多事情！"

同拿破侖抗爭，同他講述真理，這是需要勇氣的事。曾經有一次在研究院會議上，拿破侖大發雷霆，蠻橫無禮，弄得可憐的老拉馬克(Lamarck)大哭起來。

在貸方一邊則是拉普拉斯對初學者真誠慷慨的幫助。畢奧(Biot)講到，他曾作爲一個年輕人在科學院宣讀一篇論文，拉普拉斯在場，後來把畢奧領到一旁，給他看了自己尚未出版的一份紙張已經發黃，記有同樣發現的舊手稿。拉普拉斯囑咐他保密，讓他繼續幹，並出版宣讀的著作。這只是多次這類事中的一件。拉普拉斯喜歡說研究數學的初學者是他的繼子。其實他待他們像對自己的親兒子一樣好。

由於常常被引用來作爲數學家不切實際的例證，我們將在下面介紹拿破侖對拉普拉斯的著名評價。據說這是位在聖赫勒拿馬當囚徒時爲使自己獲釋而寫下的。

"一個第一流的數學家，拉普拉斯很快就暴露出自己只是個平庸的行政官;從他最初的工作我們就發覺，我們受騙了。拉普拉斯不能從真實的觀點看出任何問題，他處處尋求精巧，想出的只是些糊塗主意，最後把無窮小的精神帶進行政機關來。"

這個挖苦的鑒定是由拉普拉斯那個只有短短六個星期的內政大臣任期產生的。但是，由於盧西恩・波拿巴需要立即有個職位，並取代拉普拉斯，拿破侖也許一直在爲他有名的裙帶風進行文飾。拉普拉斯給拿破侖做的鑒定沒有流傳下來。它也許會有如下內容：

"一個第一流的軍人，拿破侖很快就暴露出自己只是個平庸的政治家。從他最初的成就我們就發覺，他受騙了。拿破侖能從明顯的觀點看出所有問題；他處處疑心叛逆(除開叛逆所在之處)，得到的只是擁護者孩子般的崇奉，最後把無限慷慨的精神帶進盜賊的巢穴。"

歸根到底，哪一個是比較實際的行政官？是這個不能保持其利益，並作爲敵人的俘虜死去的人呢，還是那個直到臨終那天仍在不斷增加其財富和榮譽的人呢？

拉普拉斯度過他生命的最後時光是在離巴黎不遠的、他在阿格伊的莊園中舒適幽靜的住處。病的時間不長，於 1827 年 3 月 5 日逝世，終年 78 歲。

大自然的全部結果不過是少數幾個永恆定律的數學推論>
---P.S．拉普拉斯(Laplace)

二、理論

Laplace 轉換是由 Laplace 寫的一本書叫做「基礎天文物理學」裡提出的，依照 Laplace 當時的說法，「基礎天體物理學」雖名爲〝基礎〞，但是寫給當時的老師看的，可見 Laplace 也是相當自傲！但 Laplace 的確有實力也有資格自傲！

「基礎天體物理學」裡除了提出 Laplace 轉換，還提出了一個數百年後一直困擾著台灣研究所考生的數學方法，那就是「Laplace P.D.E.」，P.D.E.就是偏微分方程式，學到偏微分方程式一定會學到 Laplace P.D.E.。

接下來進入正題，Laplace 轉換是一種積分轉換(Integral transform)，藉由這種積分轉換法可簡化很多積分運算問題，Laplace 轉換定義如下：

$$£\{ f(t) \} = \int f(t) e^{-st} dt = F(s)$$ ，積分區間：0 ～ ∞

上式表示一函數 $f(t)$ 取 Laplace 轉換後爲 $F(s)$，請注意積分區爲爲 0 至 ∞，這是源自於天文物理學，因天文物理學的探討是以〝現在〞爲原點，到〝無窮遠〞後會發生的事，但爲近代電機工程廣泛使用於電路學、自動控制，這是 Laplace 大師在世時永遠想像不到的事，因爲當初電磁學正處於研究階段，更遑論有〝電路〞這種東西了！

e^{-st} 爲核函數(Kernel function)，是個衰減函數

這是 Laplace 聰明之極的地方，因爲探討事物從現在到無窮遠後的事，本來是不可能的，但是乘上衰減函數後，我們就可將無窮遠縮成〝有限〞，這就可以探討，而且不失該事物無窮遠後的特質。

Laplace 轉換除了應用於天文物理學、電路學、自動控制外，還可拿來解常微分方程式(O.D.E.)、P.D.E.與一些特殊函數的積分運算，如：

$\int (\sin x / x) dx$ ， 積分區間：0 ～ ∞

$\int (\cos x / x) dx$ ， 積分區間：0 ～ ∞

$\int (e^{\pm x} / x) dx$ ， 積分區間：0 ～ ∞

三、貢獻

拉普拉斯轉換（Laplace transform）（以下 簡稱為拉氏轉換）在拉氏轉換相對應的空間領域裏，通常慣用以變數符號 s 的 函數來作為信號的表述。而在事實上，由於拉氏轉換擁有一對一的對應特性，因 此並不會造成信號轉換之間的混淆。換句話說，一個以時間函數 $x(t)$ 所表示的信 號，就只會有一個與其相對應的拉氏轉換表述函數 $X(s)$，但是特別要注意的是， 並非所有的時間信號都會存在有與其相對應的拉氏轉換。一般在拉氏轉換的定義 上，我們會有下列數學積分運算的關係式：

$$X(s) = L\{x(t)\} = +_0 \; x(t)e^{2st}\,dt$$

此外，我們也會把下列表述的關係式稱做為一組拉氏轉換對組（Laplace transform pair）：

$$L\{x(t)\} = X(s) \qquad x(t) = L^{21}\{X(s)\}$$

其中符號 $L\{\theta\}$ 表示的是拉氏轉換的積分運算，而符號 $L^{21}\{\theta\}$ 被稱做反拉氏轉換（inverse Laplace transform）也就是拉氏轉換的逆運算。

舉例來說，當時間函數 $x(t) = 1$ 的時候，其相對應的拉氏轉換經過上述計算後，就可以被表示成 $X(s) = \dfrac{1}{s}$；而當信號被選為一個指數函數的形式時，也就是 $x(t) = e^{t}$，它的拉氏轉換就可以經計算而被寫成 $X(s) = \dfrac{1}{s\,21}$。為了拉氏轉換在使用上的方便，一些常用的時間函數信號的拉式轉換，都可以直接從登載有拉式轉換對組的轉換表上查得。表(一)列出了一些常用的時間函數信號的拉氏轉換對組，其中相關的係數 a 和 b 可以是任意的實數。

表(一) ： 常用的時間函數信號的拉氏轉換對組

$x(t), \quad t \,\varepsilon\, 0$	$X(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^2	$\dfrac{2}{s^3}$
e^{2at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2}$

拉氏轉換中的變數符號 s ，基本上可以當作一個複數來看待，也就是可以寫成 $s=\sigma+j\omega$，其中 σ 和 ω 都是實數，而 $j=\sqrt{-1}$ 。當選定 $\sigma=0$ 時，也就是說 s 變成只剩下 $j\omega$ 這一項，如果把這個關係式 $s=j\omega$ 代回去上述的拉氏轉換數學式，那麼整個式子就會變成了一般傅立葉轉換的表述式。從這個層面來看，拉氏 轉換其實就可以稱做是廣義的連續時間（continuous time）的傅立葉轉換。所以 在傅立葉轉換中所擁有的一些重要特性，譬如說線性加成（linearity）、時間微分（time differentiation）、時間積分（time integration）與迴旋積分（convolution）等特性，拉氏轉換也同樣會擁有這些性質。我們在此把這幾個重要定理依序在表(二)中列出來，其中相關的係數 a_1 和 a_2 可以是任意的實數。

表(二) ： 拉氏轉換的一些重要定理

$x(t),\quad t\geq 0$	$X(s)$
$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0)$
$\int^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
$\int_0 h(t-\tau)x(\tau)d\tau$	$H(s)X(s)$

接著下來，我們就來討論拉氏轉換究竟有什麼用途。簡單來說，拉氏轉換最大的好處就是它能夠把較為複雜的關於積分與微分的問題，轉變成運用比較容易計算的代數方法來解決。因此，在拉式轉換的廣泛應用上，通常是被使用來解決 下列幾種形式的問題：

- 用來解常數係數（constant coefficient）的線性微分或積分方程式。
- 用來分析線性非時變系統（linear time-invariant system）的輸入與輸出信號之間的關係。

就讓我們在這裏舉兩個例子來看看如何有效的運用拉氏轉換。

首先，我們來介紹如何利用拉氏轉換來解一個線性微分方程式。假設現在有 一個待解的微分方程式如下所示：

$$\dot{y}(t)+2y(t)=x(t),\quad y(0)=1,\quad x(t)=10,\quad t\geq 0$$

利用拉氏轉換在表(一) 與表(二)所列的關係式，我們先在這個微分方程式等號的兩邊取各自的拉氏轉換，然後就可以得到以下的式子：

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = X(s)$$

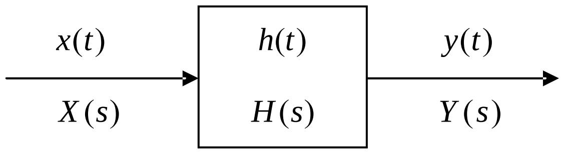
因為 $x(t)=10$ 的拉氏轉換是 $X(s)=\frac{10}{s}$ ，我們將這個結果與初始值 $y(0)=1$ 代回去上述式子，經過移項整理後，我們可以得到

$$(s+2)Y(s) = 1 + \frac{10}{s}$$

接著在等號的兩邊除以“$s+2$”這一項，經過進一步的整理可得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s+2} + \frac{10}{s(s+2)} \\ &= \frac{5}{s} - \frac{4}{s+2} \end{aligned}$$

既然 $y(t) \leftrightarrow Y(s)$ 是為一組拉氏轉換對組，所以微分方程式的解 $y(t)$ 就可以直接



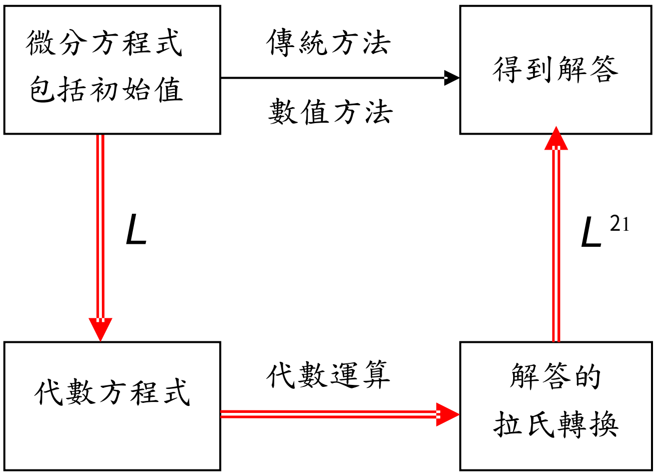
圖(二)：線性非時變系統輸入與輸出信號方塊圖

在上述圖(二) 的系統中，輸入與輸出信號在時域定義裏相互之間的關係，可以用下列迴旋積分的式子來表示：

從上述的 $Y(s)$ 取反拉氏轉換來獲得，也即是

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 5 - 4e^{-2t}$$

因此，我們僅只使用代數四則運算的方法，以及查對拉氏轉換的對組和定理，微分方程式的解就這麼輕而易舉的獲得了。這個以拉氏轉換來求解線性微分方程式 的所有演算程序，即如圖(一)中的紅色箭號所示。



圖(一)：利用拉氏轉換解線性微分方程式的過程

接下來的這個例子，我們將要討論利用拉氏轉換來分析線性非時變系統的輸入與輸出信號之間的關係。在一般的線性非時變系統中，通常會使用圖(二) 的方塊圖來表示輸入與輸出信號與系統之間的關係，其中 $x(t)$ 是輸入信號，$y(t)$ 是輸出信號，$h(t)$ 是表示系統特性的脈衝響應（impulse response）而 $X(s)$ 、$Y(s)$ 和 $H(s)$ 分別代表是它們相對應的拉氏轉換表述。

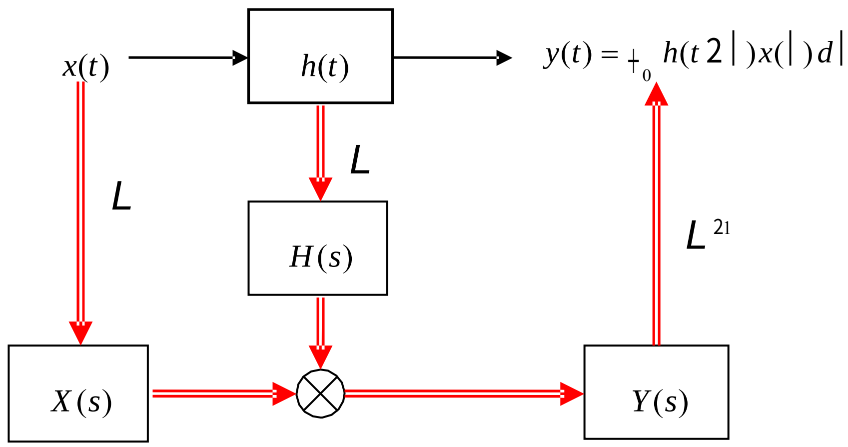
s^2+1 $\qquad s+2$

$$Y(s)=H(s)X(s)=\left(\frac{1}{s+2}\right)\left(\frac{5}{s^2+1}\right)$$
$$=\frac{1}{s+2}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}$$

最後取上述式子的反拉式轉換，我們就可以得到如下的系統輸出 $y(t)$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$
$$=e^{-2t}-\cos t+2\sin t$$

總之，我們僅只使用代數運算的法則，以及查表找出拉氏轉換的對組和定理，就這麼輕而易舉的得到了線性系統的輸出信號。這個以拉氏轉換來找出線性系統輸 出響應的所有演算過程，即如圖(三)中的紅色箭號所示。



看了以上幾個運用拉氏轉換的例子，想來大家已經能夠感受到拉氏轉換好用的地方。除了上述的幾種應用之外，拉氏轉換還可以用來探討電阻-電感-電容的電路（*RLC* circuit）分析問題，也可以被使用來求取系統的轉移函數（transfer function），進而利用它來決定系統的穩定性（stability）及頻率響應（frequency response）。由於篇幅限制的因素，在此我們就不再多做敘述，有興趣的讀者可以 去看看下列的參考書籍。總而言之，如果能夠有效的活用拉氏轉換這個數學工具，那麼許多與微分或積分相關的複雜問題，都可以利用代數運算的方法簡單地來分析與解答。