第十章

統計估計

學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。

學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 了解優良估計式的性質。

學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 了解優良估計式的性質。
3. 了解區間估計的意義。

學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 了解優良估計式的性質。
3. 了解區間估計的意義。
4. 了解大樣本與小樣本母體常態、變異數已知與未知下，單一母體平均數區間估計的方法。知悉 t 分配的意義與機率值。

學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 了解優良估計式的性質。
3. 了解區間估計的意義。
4. 了解大樣本與小樣本母體常態、變異數已知與未知下，單一母體平均數區間估計的方法。知悉 t 分配的意義與機率值。
5. 了解單一母體比例區間估計的方法。

學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 了解優良估計式的性質。
3. 了解區間估計的意義。
4. 了解大樣本與小樣本母體常態、變異數已知與未知下，單一母體平均數區間估計的方法。知悉 t 分配的意義與機率值。
5. 了解單一母體比例區間估計的方法。
6. 了解單一母體變異數區間估計的方法。了解卡方分配的意義與卡方值。

學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 了解優良估計式的性質。
3. 了解區間估計的意義。
4. 了解大樣本與小樣本母體常態、變異數已知與未知下，單一母體平均數區間估計的方法。知悉 t 分配的意義與機率值。
5. 了解單一母體比例區間估計的方法。
6. 了解單一母體變異數區間估計的方法。了解卡方分配的意義與卡方值。
7. 了解區間估計的方法在經濟、政治、社會及企業管理方面的應用。

學習目的

1. 了解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 了解優良估計式的性質。
3. 了解區間估計的意義。
4. 了解大樣本與小樣本母體常態、變異數已知與未知下，單一母體平均數區間估計的方法。知悉 t 分配的意義與機率值。
5. 了解單一母體比例區間估計的方法。
6. 了解單一母體變異數區間估計的方法。了解卡方分配的意義與卡方值。
7. 了解區間估計的方法在經濟、政治、社會及企業管理方面的應用。
8. 利用 Excel 做統計估計。

本章結構

- 統計估計
  - 點估計
    - 點估計的意義
    - 點估計的步驟
    - 點估計的限制
  - 估計式的判斷標準
    - 不偏性
    - 有效性
    - 一致性
    - 判斷估計式的應注意事項
  - 區間估計
  - 母體平均數的區間估計－大樣本
    - 母體變異數已知
    - 母體變異數未知
  - 母體平均數的區間估計－小樣本
    - 母體常態變異數已知
    - 母體常態變異數未知
  - 母體比例的區間估計
  - 母體變異數的區間估計
    - 卡方分配的意義
    - 卡方分配的性質
    - 由卡方分配導出母體變異數的信賴區間
  - 樣本數的選擇
    - 母體常態變異數已知
    - 母體常態變異數未知
  - Excel的使用

統計估計

- 統計估計是利用樣本統計量去推估母體參數的方法。

點估計

- 點估計的意義
  由母體抽取一組樣本數為 n 的隨機樣本，並以由此得到的樣本統計量作為母體參數的估計值。

點估計

- **點估計的意義**
  由母體抽取一組樣本數為 n 的隨機樣本，並以由此得到的樣本統計量作為母體參數的估計值。
- **點估計的步驟**

  1. 抽取具代表性的樣本。

點估計

- 點估計的意義
  由母體抽取一組樣本數為 n 的隨機樣本，並以由此得到的樣本統計量作為母體參數的估計值。

- 點估計的步驟

1. 抽取具代表性的樣本。
2. 選擇一個較佳的樣本統計量作為估計式。

點估計

- **點估計的意義**
  由母體抽取一組樣本數為 n 的隨機樣本，並以由此得到的樣本統計量作為母體參數的估計值。
- **點估計的步驟**
  1. 抽取具代表性的樣本。
  2. 選擇一個較佳的樣本統計量作為估計式。
  3. 計算樣本統計量的值。

點估計

- **點估計的意義**

  由母體抽取一組樣本數為 n 的隨機樣本，並以由此得到的樣本統計量作為母體參數的估計值。

- **點估計的步驟**

1. 抽取具代表性的樣本。
2. 選擇一個較佳的樣本統計量作為估計式。
3. 計算樣本統計量的值。
4. 以樣本統計量的值推論母體參數值並做決策。

台北市區房屋的價格

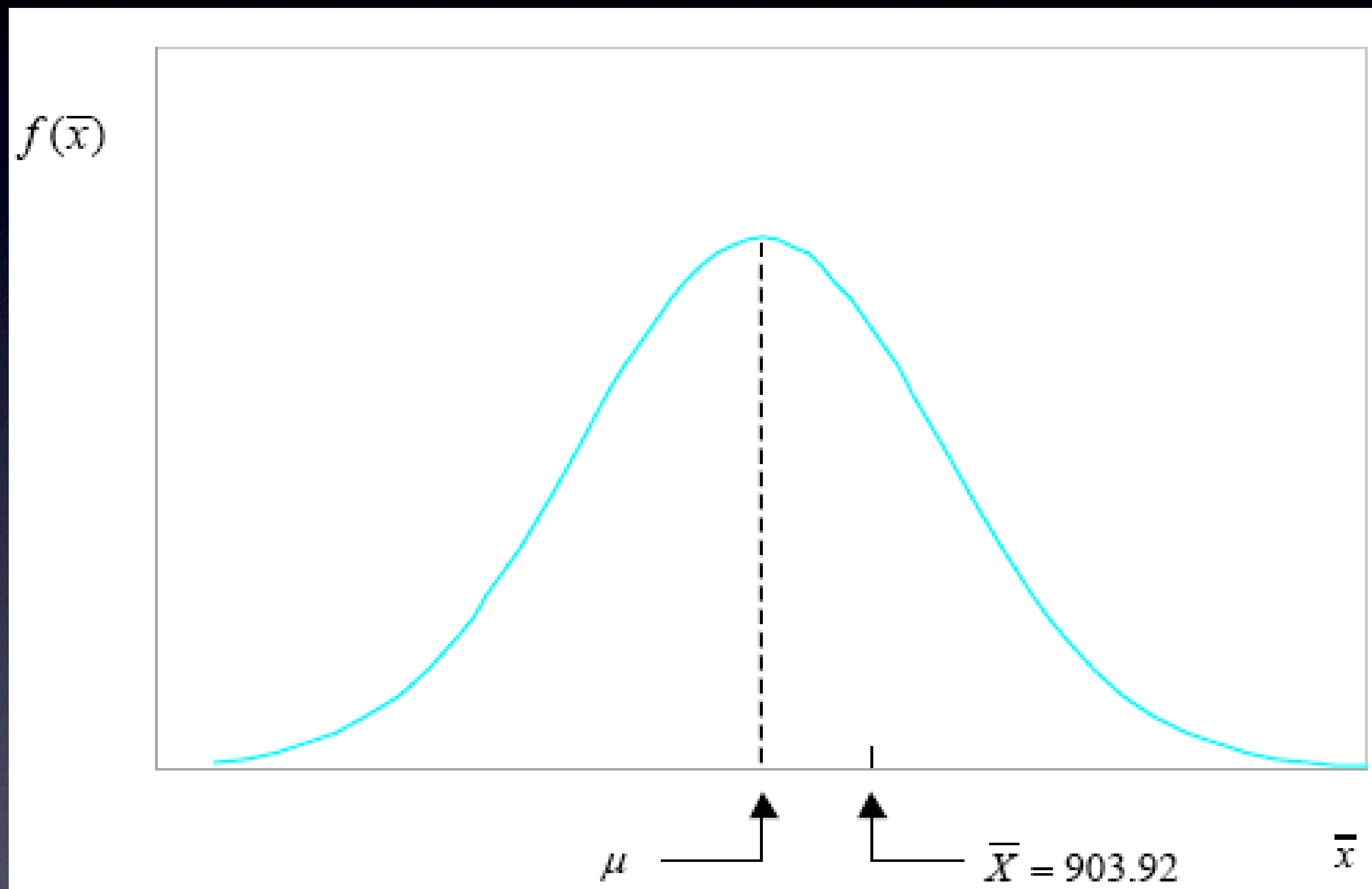
595	1,400	620	790	800	820	1,250	1,380	1,388
890	898	928	1,100	950	960	980	980	620
650	698	698	750	750	760	998	1,050	1,080
838	850	850	850	850	850	860	880	930

資料來源：各房屋仲介公司 93 年 2 月。 單位：百萬元。

工具 → 資料分析 → 敘述統計

	A	B
1	台北市區房屋價格的估計	
2		
3	平均數	903.92
4	標準誤	34.17
5	標準差	205.01
6	變異數	42030.31
7	個數	36

台北市區房屋價格的估計



估計式的評斷標準

- 不偏性－不偏估計式

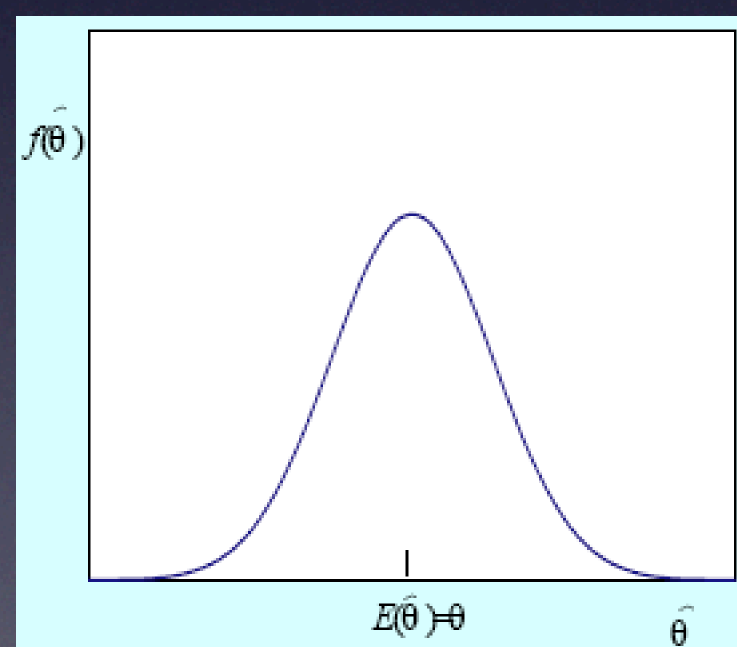
  若估計式的平均數等於母體參數值（ $E(\widehat{\theta}) = \theta$ ），則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E(\widehat{\theta}) = \theta$ ，則 $\widehat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

估計式的評斷標準

- **不偏性－不偏估計式**

  若估計式的平均數等於母體參數值（ $E(\hat{\theta}) = \theta$ ），則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，則 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

不偏估計式

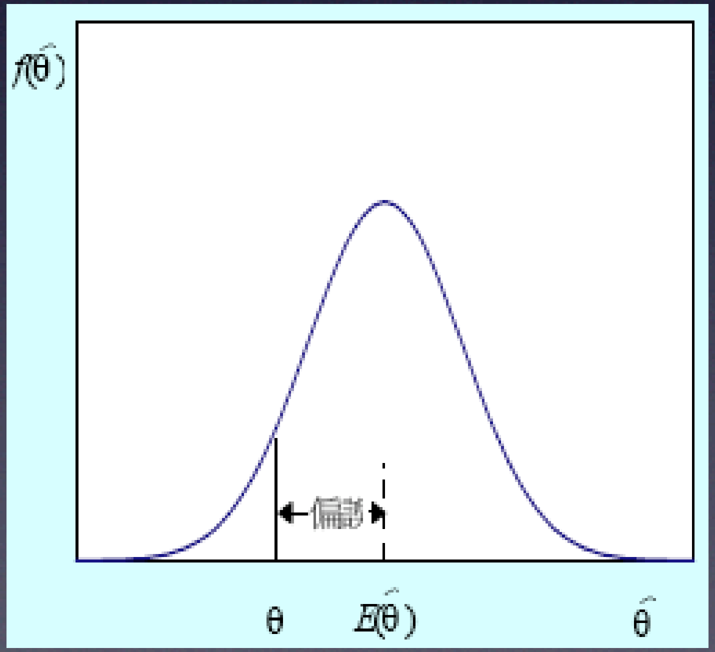


估計式的評斷標準

- 不偏性－不偏估計式

  若估計式的平均數等於母體參數值（ $E(\hat{\theta}) = \theta$ ），則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E(\hat{\theta}) = \theta$，則 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

正偏誤估計

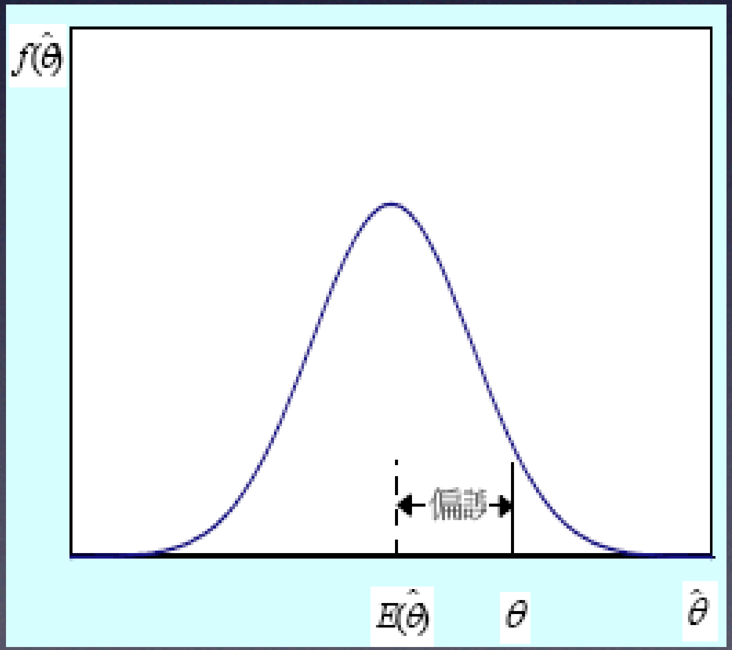


估計式的評斷標準

- 不偏性－不偏估計式

  若估計式的平均數等於母體參數值（ $E(\hat{\theta})=\theta$ ），則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E(\hat{\theta})=\theta$ ，則 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

負偏誤估計



估計式的評斷標準

- 不偏性－不偏估計式

  若估計式的平均數等於母體參數值（ $E(\hat{\theta}) = \theta$ ），則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，則 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

吃漢堡的機率分配（母體）

x	$f(x)$
0	0.4
1	0.2
2	0.3
3	0.1

$\mu = 1.1$

估計式的評斷標準

- 不偏性－不偏估計式

  若估計式的平均數等於母體參數值（ $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$ ），則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$ ，則 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

吃漢堡的相對次數分配（樣本）

x	相對次數
0	0.42
1	0.18
2	0.35
3	0.05

$\overline{X}=1.03$

估計式的評斷標準

- 有效性

1. 相對有效性

設 $\hat{\theta}$、$\hat{\hat{\theta}}$ 均為 θ 的估計式，若 $\hat{\theta}$ 的平均平方誤差相對 $\hat{\hat{\theta}}$ 的平均平方誤差較小，即 $\dfrac{MSE\left(\hat{\theta}\right)}{MSE\left(\hat{\hat{\theta}}\right)} < 1$

則稱 $\hat{\theta}$ 相對 $\hat{\hat{\theta}}$ 在估計 θ 時具相對有效性。

估計式的評斷標準

- **有效性**

1. **相對有效性**

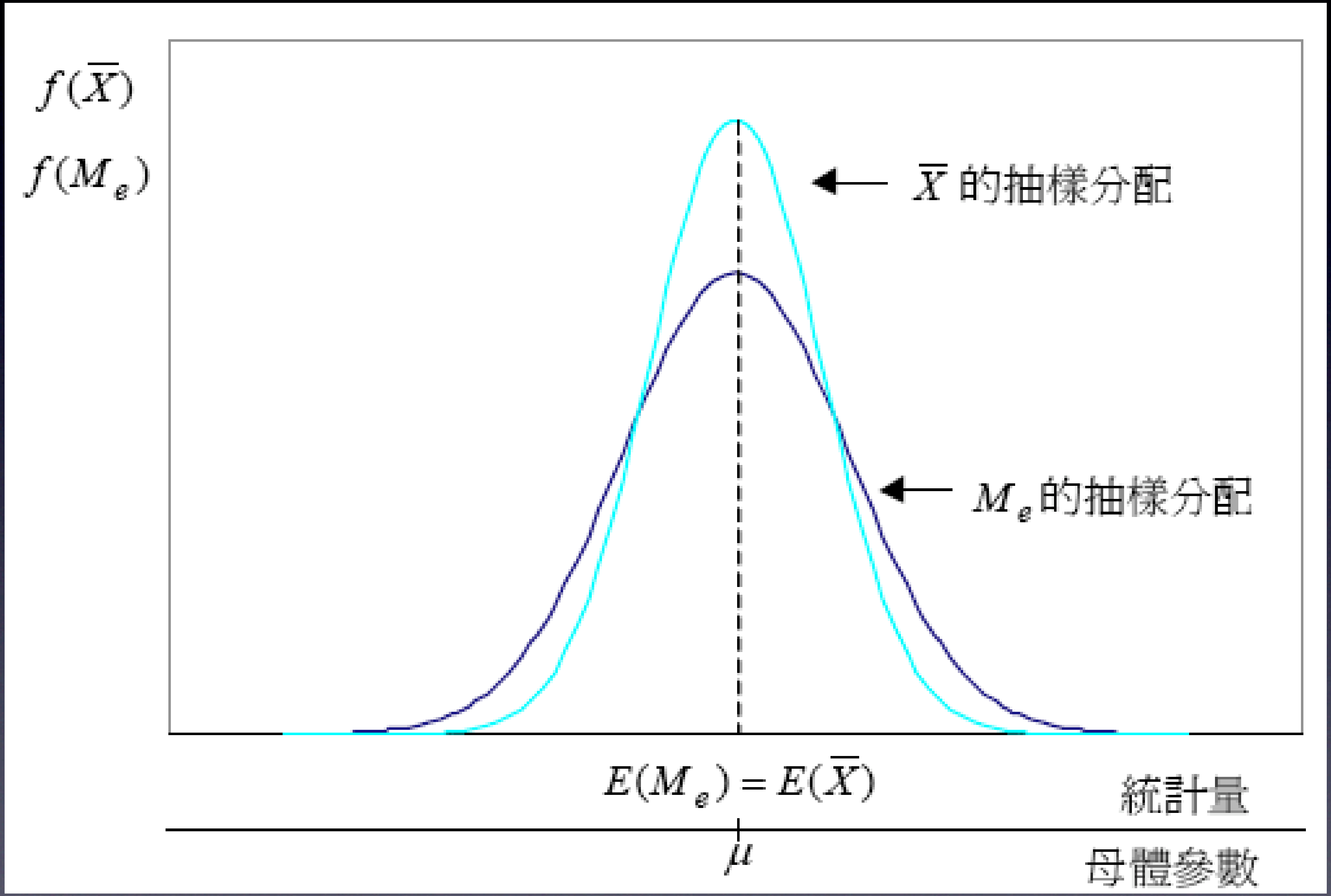
   設 $\hat{\theta}$、$\hat{\hat{\theta}}$ 均為 θ 的估計式，若 $\hat{\theta}$ 的平均平方誤差相對 $\hat{\hat{\theta}}$ 的平均平方誤差較小，即 $\dfrac{MSE\left(\hat{\theta}\right)}{MSE\left(\hat{\hat{\theta}}\right)} < 1$

   則稱 $\hat{\theta}$ 相對 $\hat{\hat{\theta}}$ 在估計 θ 時具相對有效性。

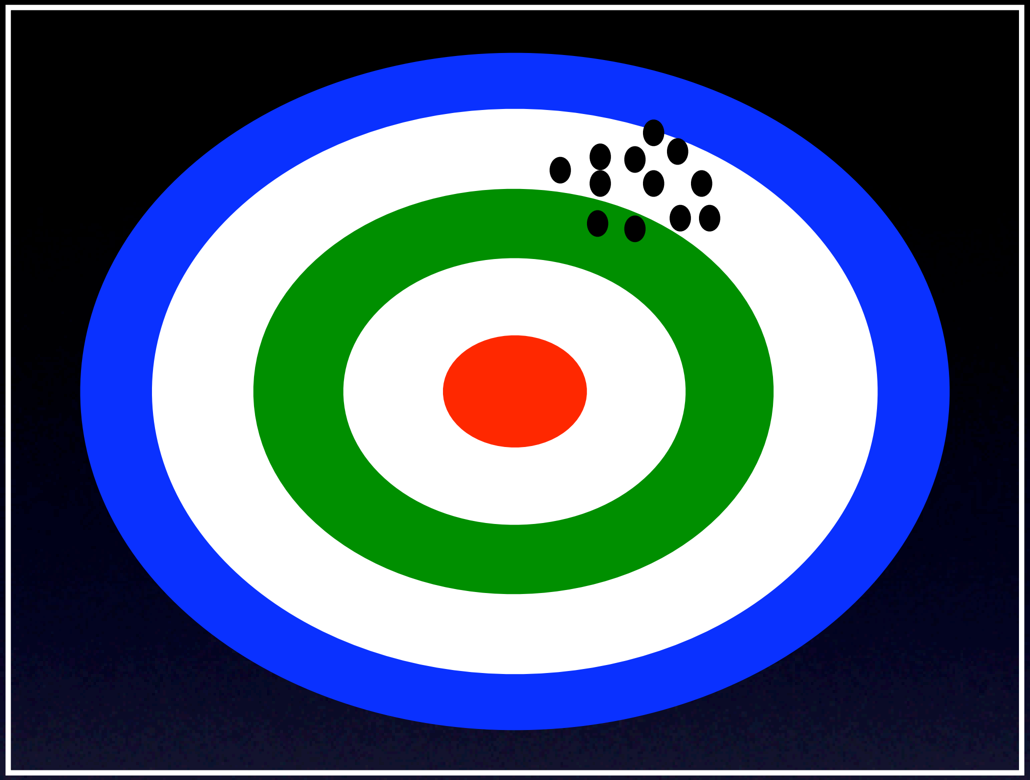
2. **不偏估計式的相對有效性**

   設 $\hat{\theta}$、$\hat{\hat{\theta}}$ 均為 θ 的不偏誤估計式，若 $V\left(\hat{\theta}\right)\big/V\left(\hat{\hat{\theta}}\right) < 1$ 則 $\hat{\theta}$ 相對 $\hat{\hat{\theta}}$ 為有效估計式。

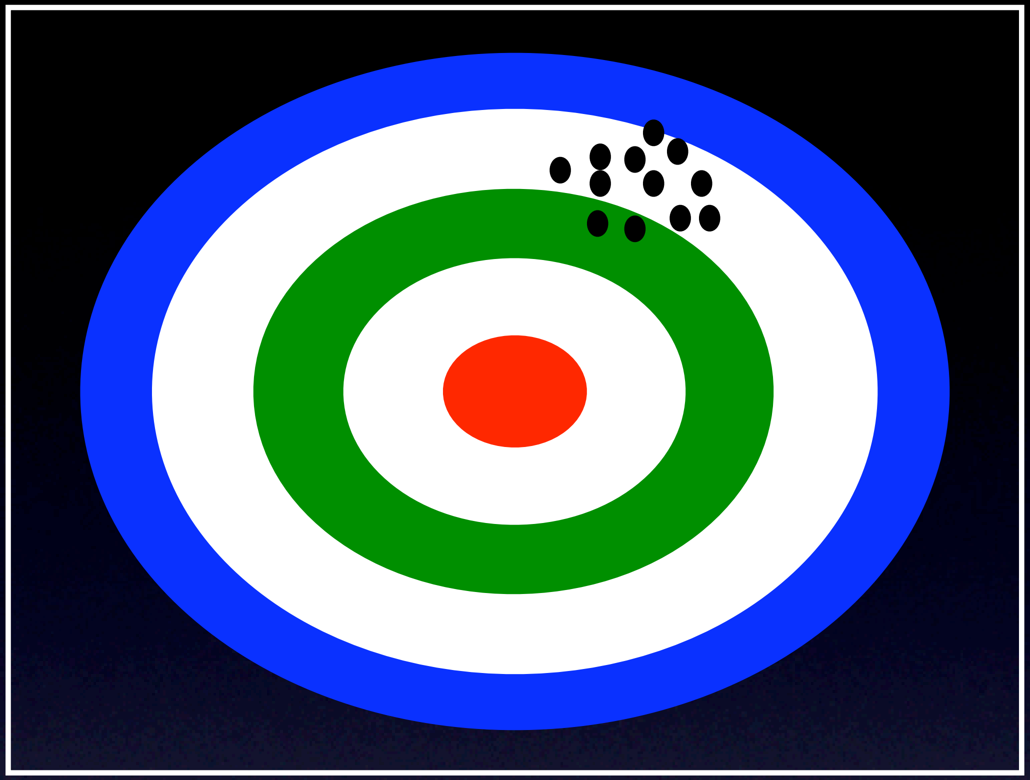
$\overline{X}$ 與 m_e 的相對有效性



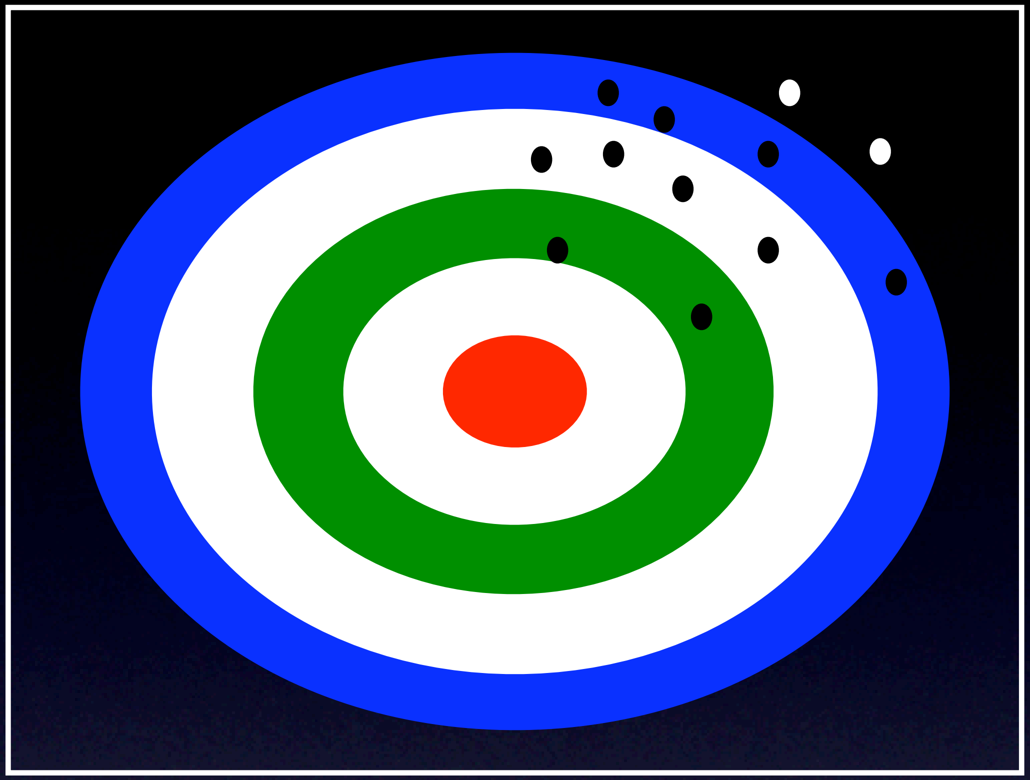
高偏差低變異



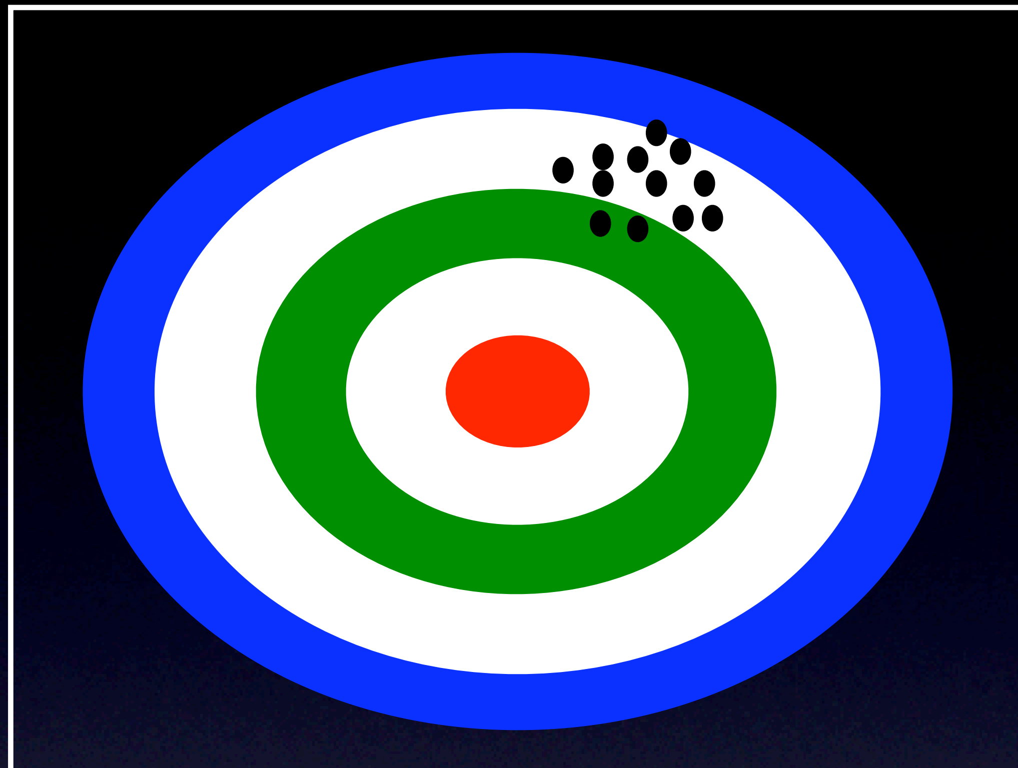
高偏差低變異



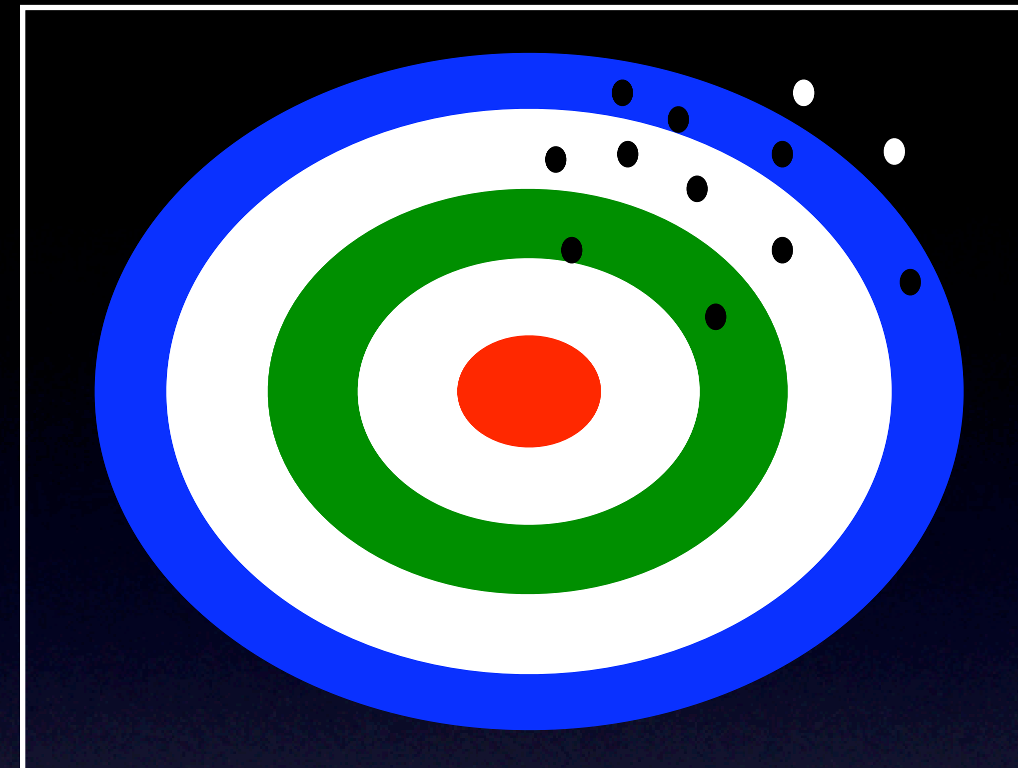
高偏差高變異



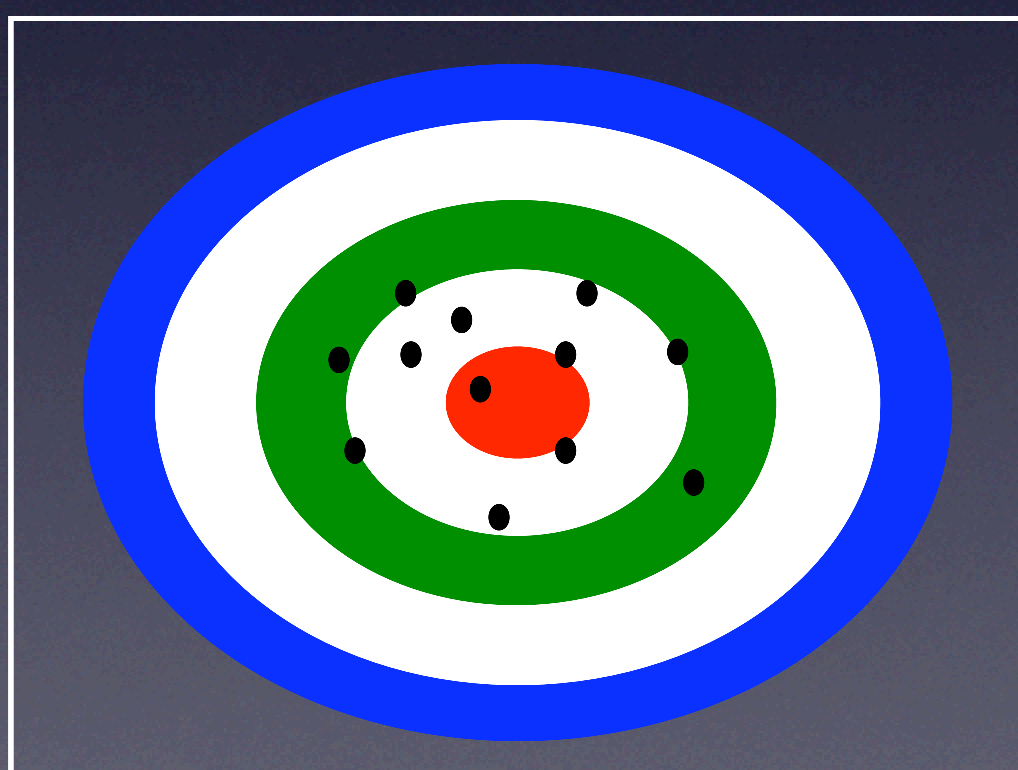
高偏差低變異



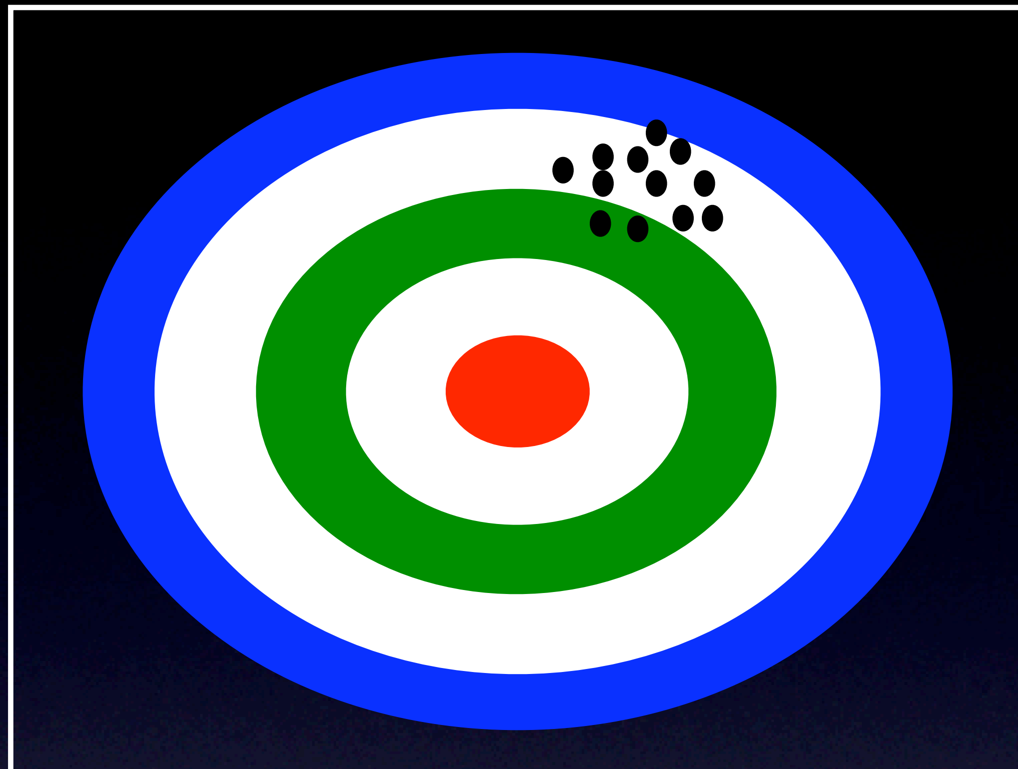
高偏差高變異



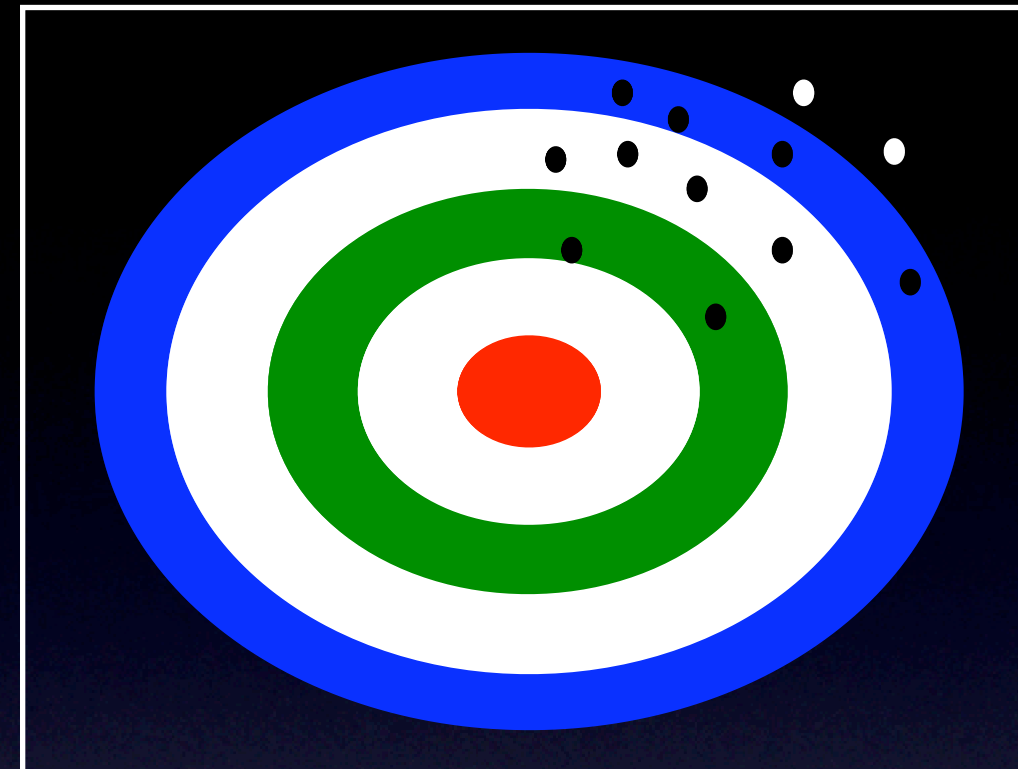
低偏差高變異



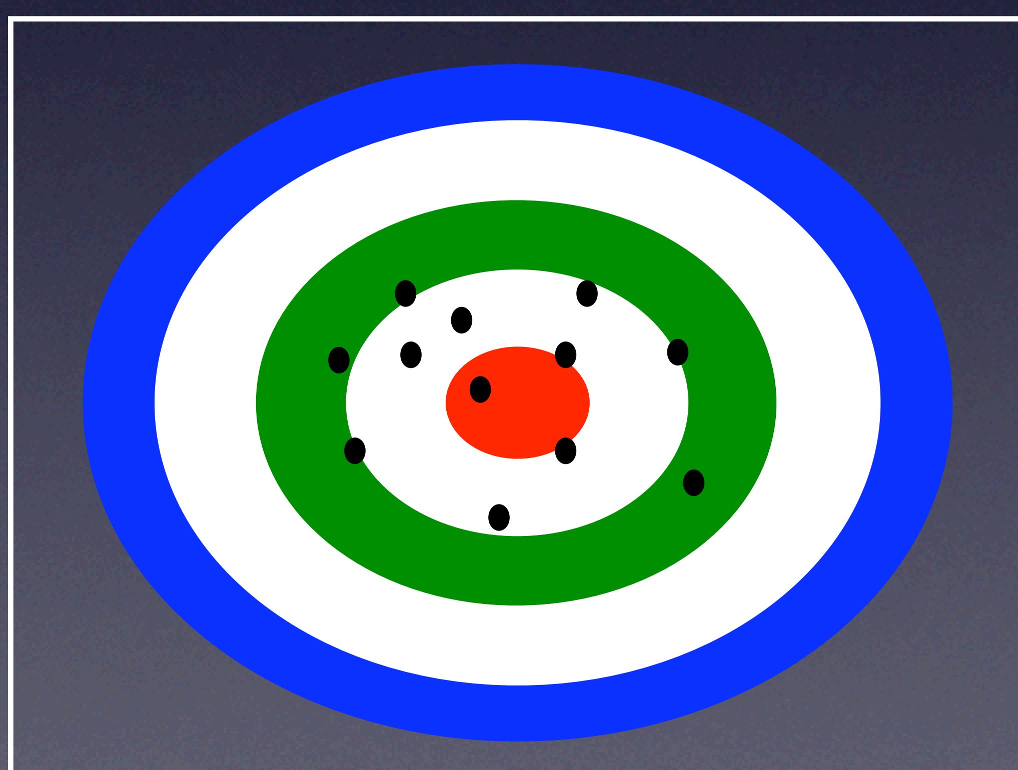
高偏差低變異



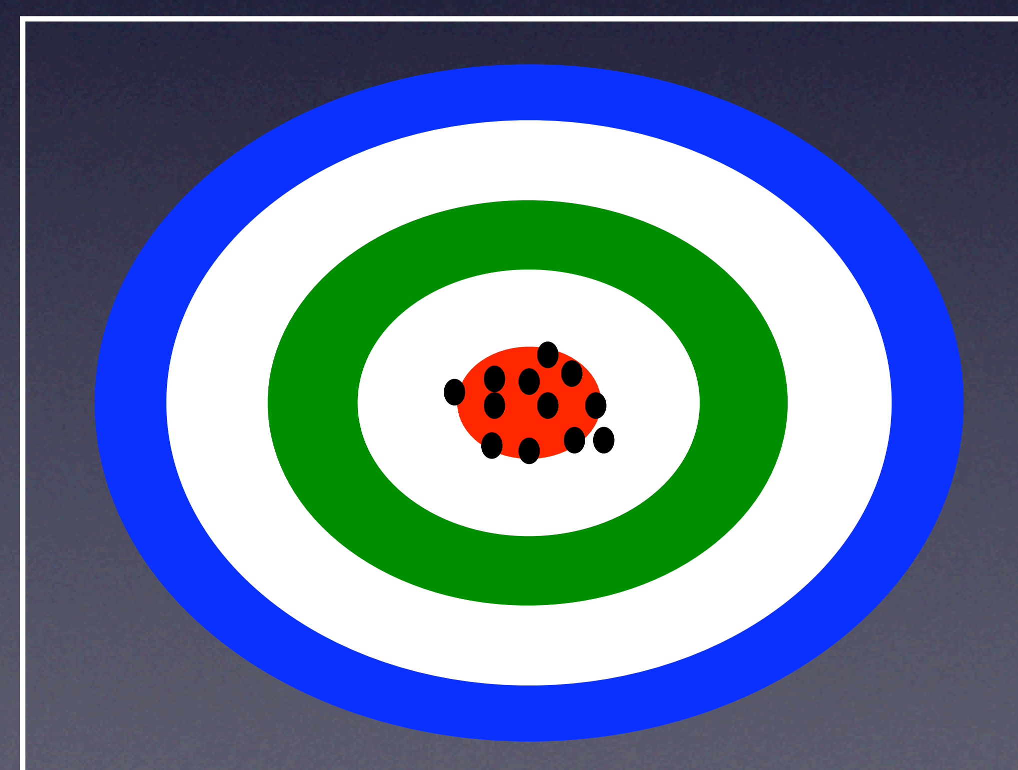
高偏差高變異



低偏差高變異



低偏差低變異



估計式的評斷標準

- 一致性

1. 一致性的定義

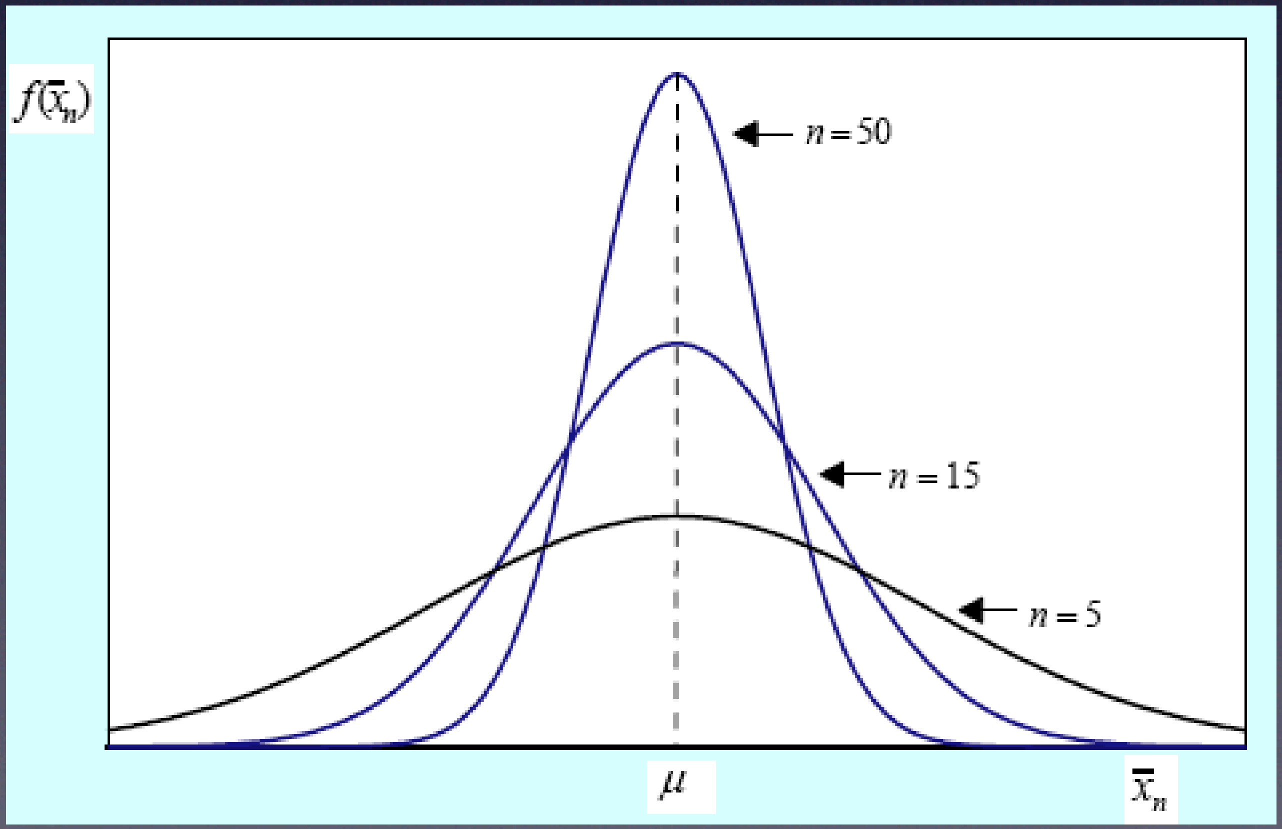
   設 $\hat{\theta}_n$ 為樣本數 n 之 θ 的估計式，若 $\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$，則 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 之一致性估計式。其中 ε 為正的極小數值。

估計式的評斷標準

- 一致性
  1. 一致性的定義

     設 $\widehat{\theta}_n$ 為樣本數 n 之 θ 的估計式，若 $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\widehat{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$，則 $\widehat{\theta}_n$ 為 θ 之一致性估計式。其中 ε 為正的極小數值。

一致性估計式



估計式的評斷標準

- 一致性
  1. 一致性的定義

     設 $\hat{\theta}_n$ 為樣本數 n 之 θ 的估計式，若 $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$，則 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 之一致性估計式。其中 ε 為正的極小數值。

  2. 一致性估計式的定理

     若 $\hat{\theta}_n$ 為不偏誤估計式或漸進不偏估計式，且當 n 趨近於無窮大時，其變異數趨近於零，即 $\lim_{n\to\infty} V\left(\hat{\theta}_n\right)=0$，則 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 之一致性估計式。

估計式的評斷標準

- 判斷估計式的應注意事項
  1. 不偏性具平均的性質

     就單一估計值而言，並不保證合於不偏性者較偏誤估計式佳，但就大多數情況而言（或平均而言），合於不偏性者產生偏誤的可能性較小。

估計式的評斷標準

- 判斷估計式的應注意事項

1. 不偏性具平均的性質

   就單一估計值而言，並不保證合於不偏性者較偏誤估計式佳，但就大多數情況而言（或平均而言），合於不偏性者產生偏誤的可能性較小。

2. 有效性

   平均平方誤差最小者為一優良估計式，但不容易找到。因此一般均先尋找不偏估計式，然後再選擇有效性較高的估計式。

估計式的評斷標準

3. 一致性為大樣本的性質
   當樣本數小時，並不保證一致性估計式會趨近母體參數，不過當樣本數增大時，偏誤會縮小，當 $n \to \infty$ 時，估計式趨近於母體參數值的機率為 1。

區間估計的意義

- 區間估計

  對未知的母體參數估計出一個上下限的區間，並指出該區間包含的母體參數的可靠度。

區間估計的意義

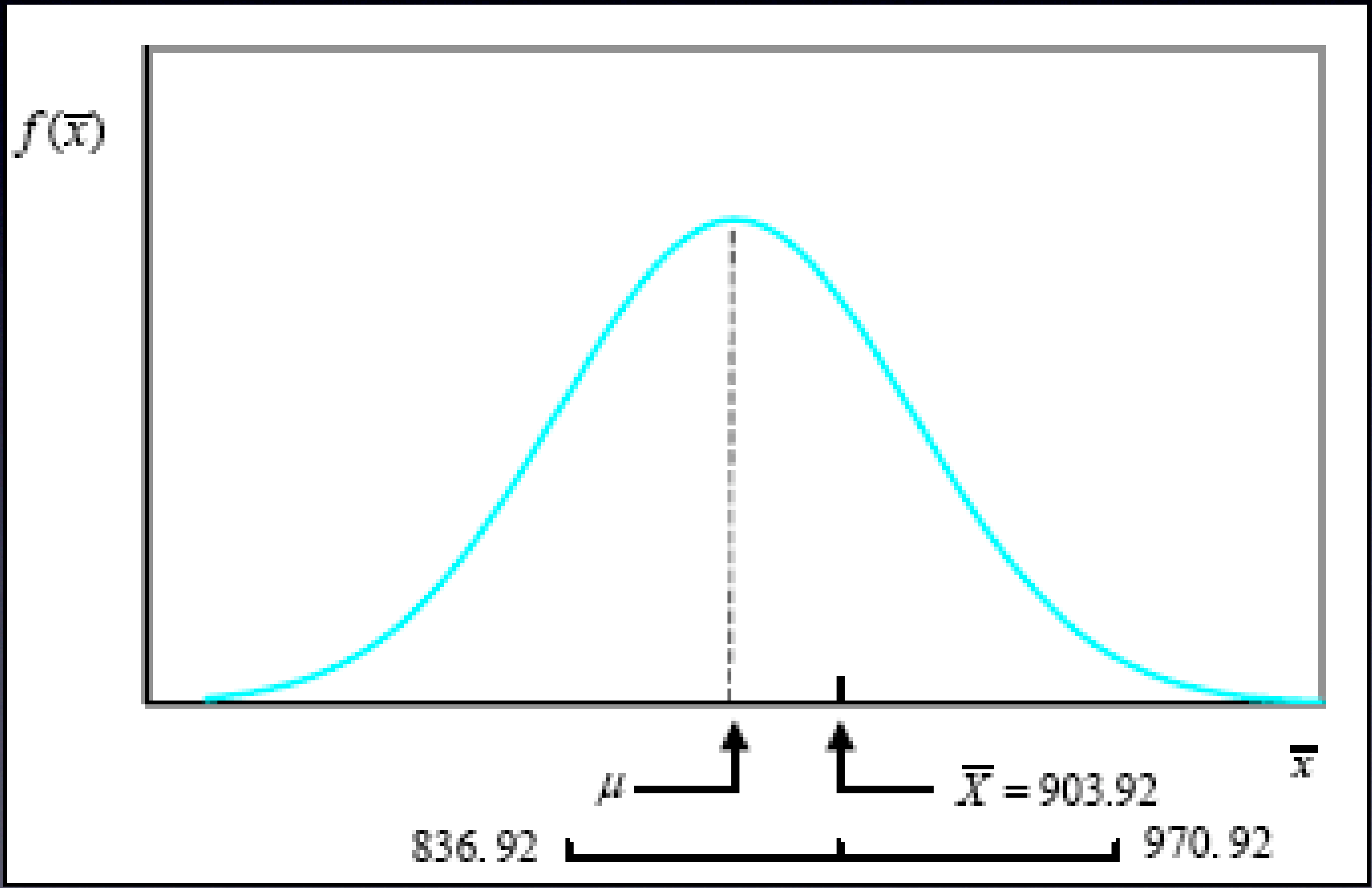
- **區間估計**
  對未知的母體參數估計出一個上下限的區間，並指出該區間包含的母體參數的可靠度。
- **信賴區間**
  信賴區間是在一個既定的信賴水準下所構成的一個區間，是由樣本統計量及抽樣誤差所構成的一個（包含上限、下限的）區間。

區間估計的意義

- 區間估計
  對未知的母體參數估計出一個上下限的區間，並指出該區間包含的母體參數的可靠度。
- 信賴區間
  信賴區間是在一個既定的信賴水準下所構成的一個區間，是由樣本統計量及抽樣誤差所構成的一個（包含上限、下限的）區間。
- 信賴水準（信賴係數）
  信賴水準是指信賴區間包含母體參數的信心（或稱可靠度、信賴度）。

區間估計的意義

母體平均數的信賴區間



母體平均數的區間估計－大樣本

- 大樣本變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$$

母體平均數的區間估計－大樣本

- 大樣本變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$$

- 大樣本變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

區間估計的步驟

- 步驟一

  選擇較佳的點估計式並計算點估計值。

區間估計的步驟

- **步驟一**

  選擇較佳的點估計式並計算點估計值。

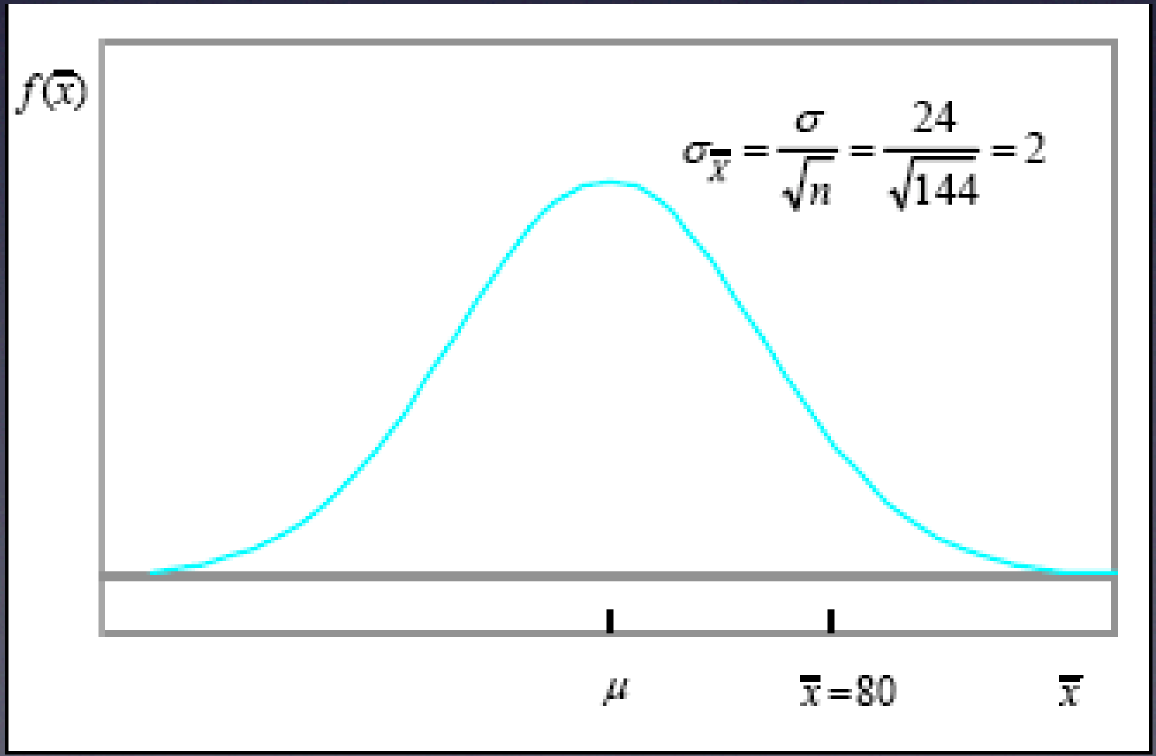
- **步驟二**

  取得樣本統計量的抽樣分配。

區間估計的步驟

- **步驟一**
  選擇較佳的點估計式並計算點估計值。
- **步驟二**
  取得樣本統計量的抽樣分配。

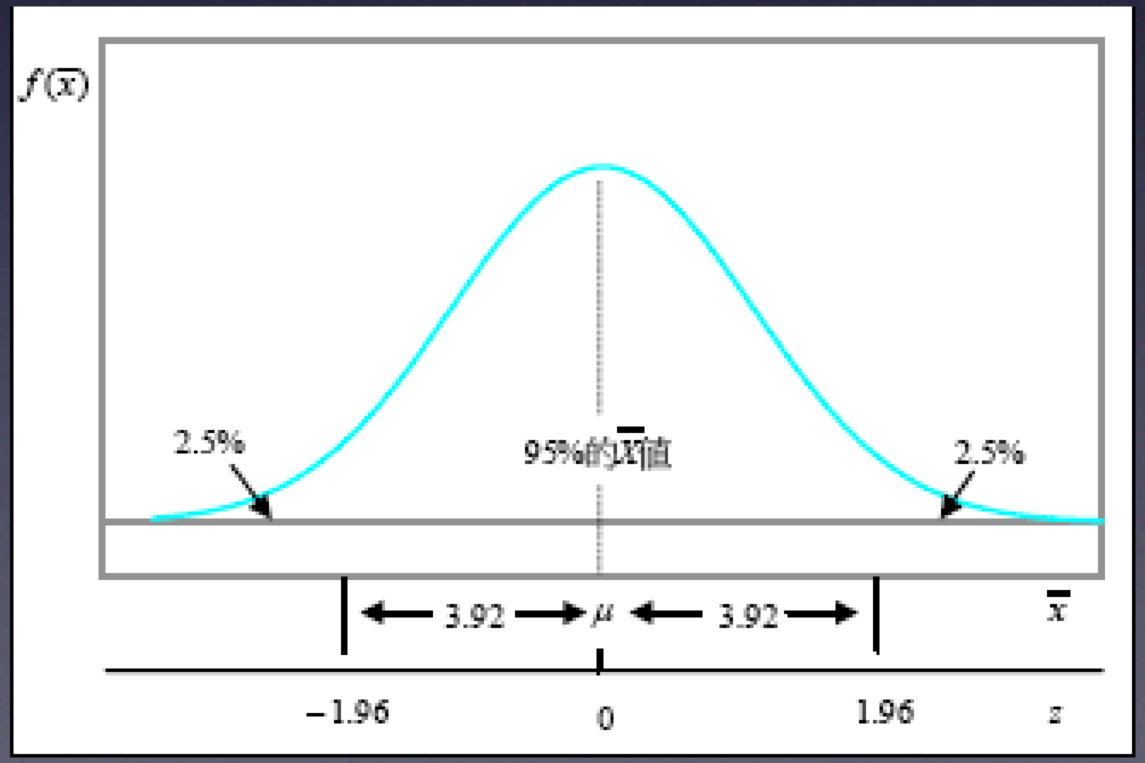
$\overline{X}$ 的抽樣分配



區間估計的步驟

- **步驟一**
  選擇較佳的點估計式並計算點估計值。
- **步驟二**
  取得樣本統計量的抽樣分配。

抽樣誤差小於等於 $1.96\sigma_{\overline{X}}$ 的區間



區間估計的步驟

- **步驟一**

  選擇較佳的點估計式並計算點估計值。

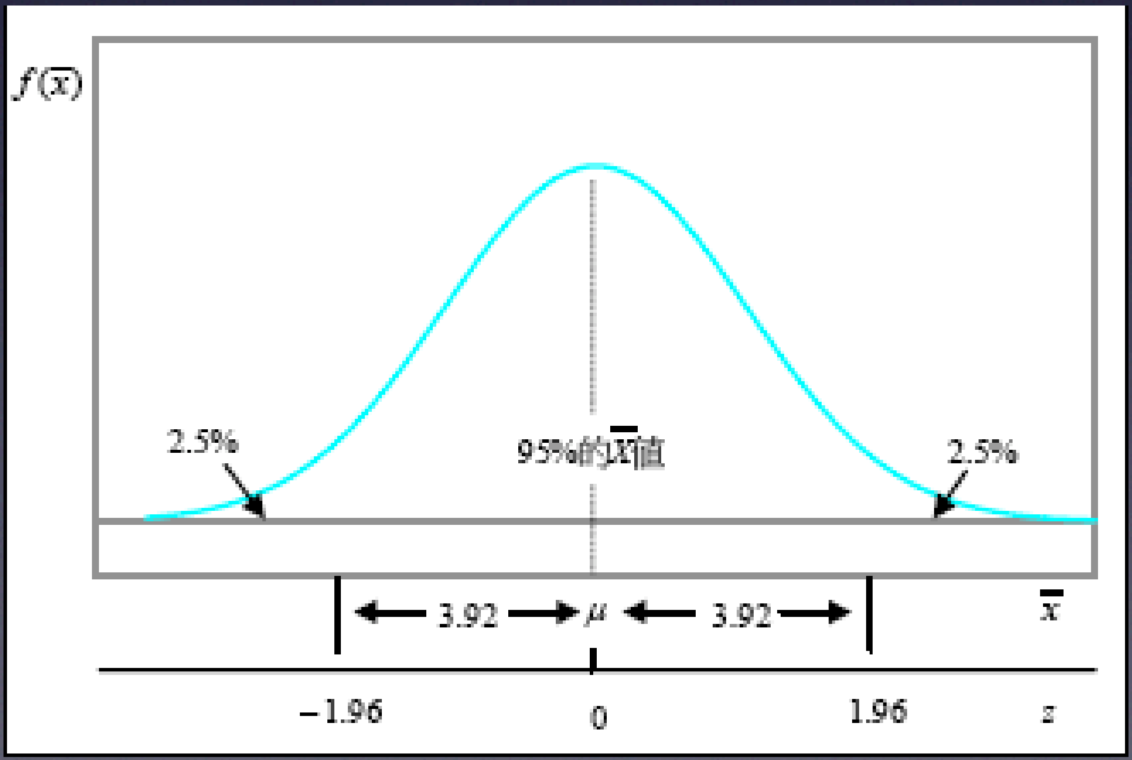
- **步驟二**

  取得樣本統計量的抽樣分配。

- **步驟三**

  導出母體參數的信賴區間。

抽樣誤差小於等於 $1.96\sigma_{\overline{X}}$ 的區間



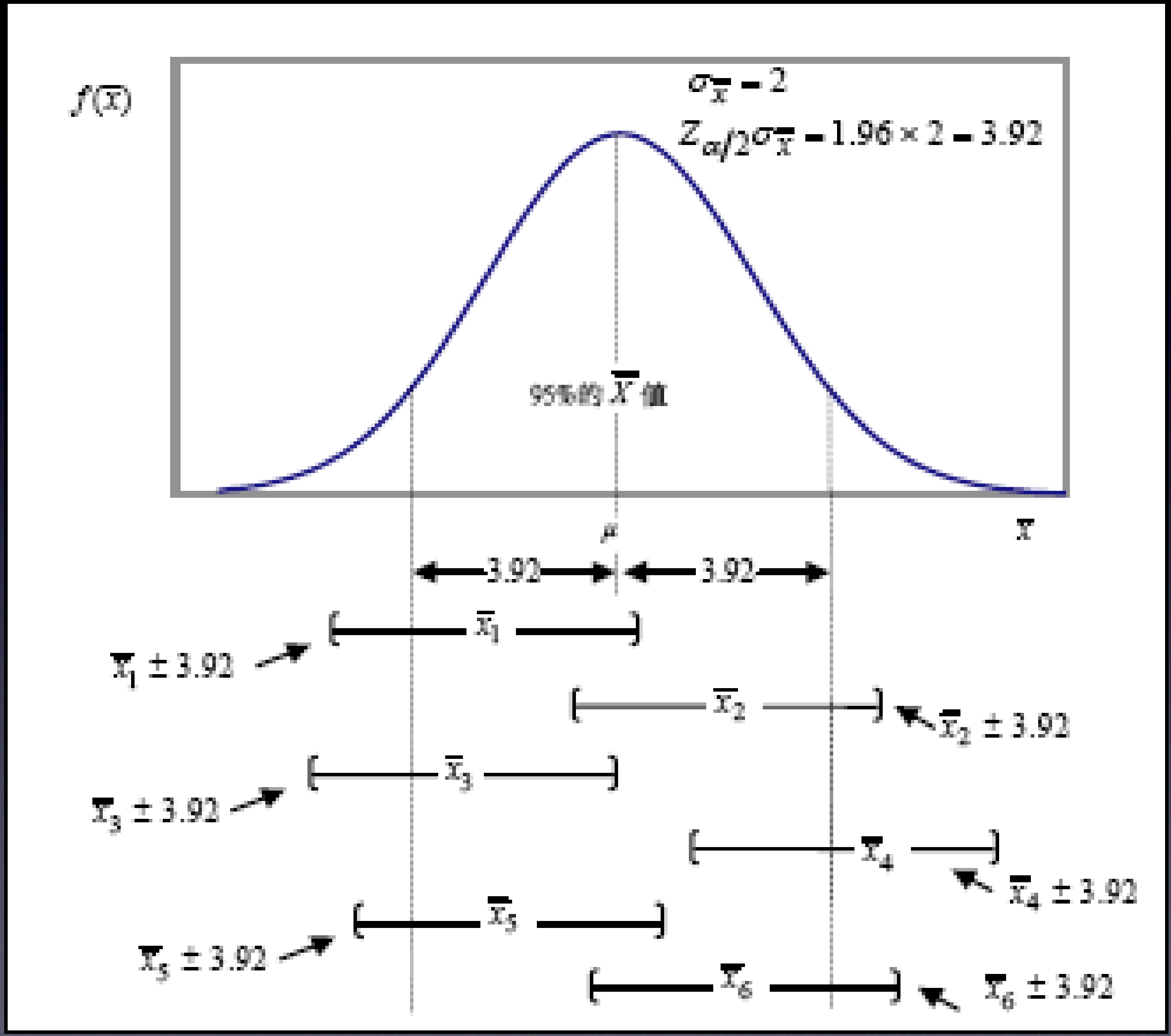
區間估計的步驟

- **步驟一**
  選擇較佳的點估計式並計算點估計值。
- **步驟二**
  取得樣本統計量的抽樣分配。
- **步驟三**
  導出母體參數的信賴區間。

95% 信賴水準

95% 信賴水準的含意是指，隨機抽取一組樣本所得的區間包含母體平均數的機率（或稱可靠度、信賴度）為 0.95。或說區間不包含母體平均數的機率為 0.05。

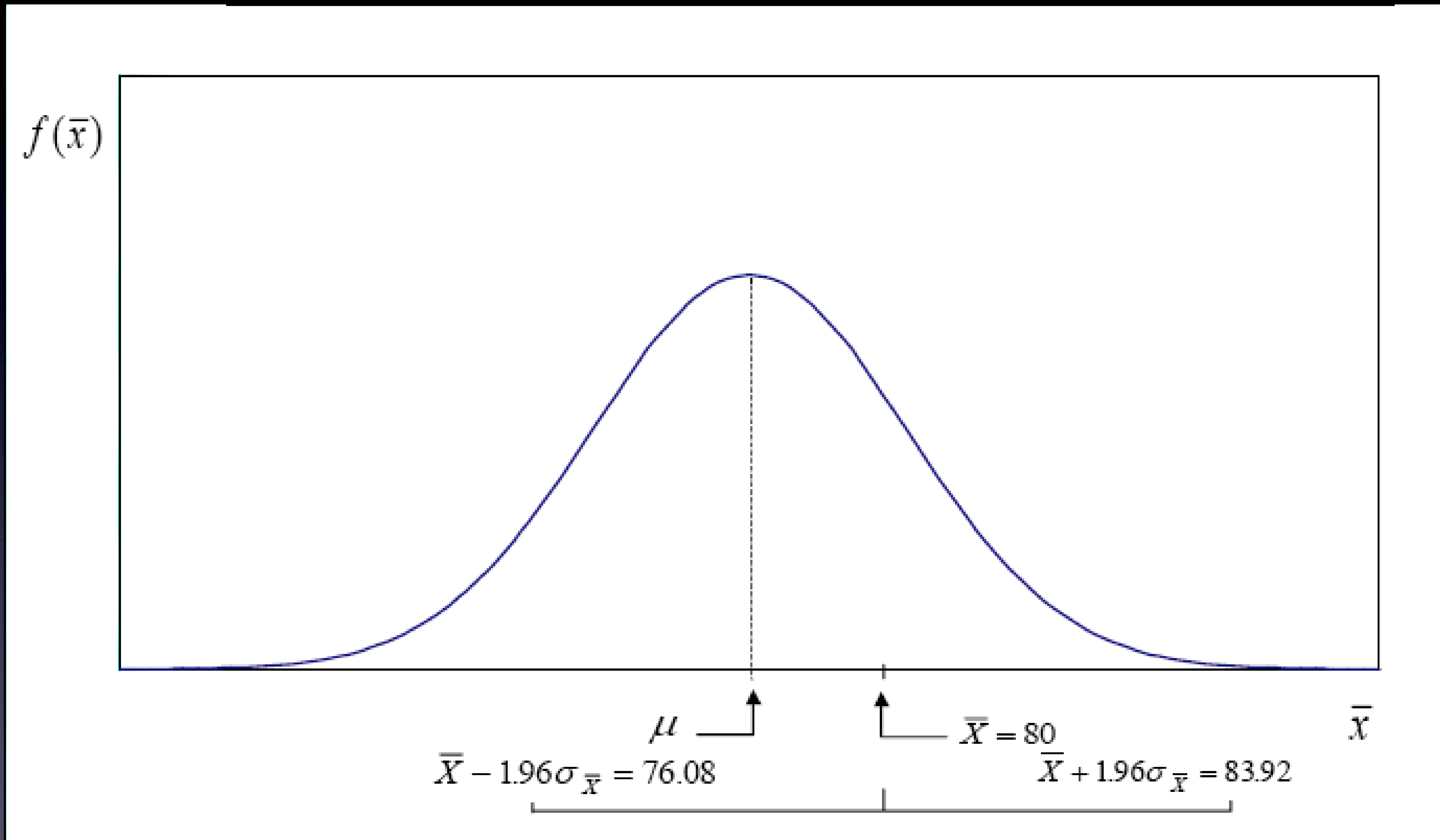
母體平均數 μ 的信賴區間



區間估計的步驟

- **步驟一**
  選擇較佳的點估計式並計算點估計值。
- **步驟二**
  取得樣本統計量的抽樣分配。
- **步驟三**
  導出母體參數的信賴區間。
- **步驟四**
  求出母體參數的信賴區間值並做統計推論。

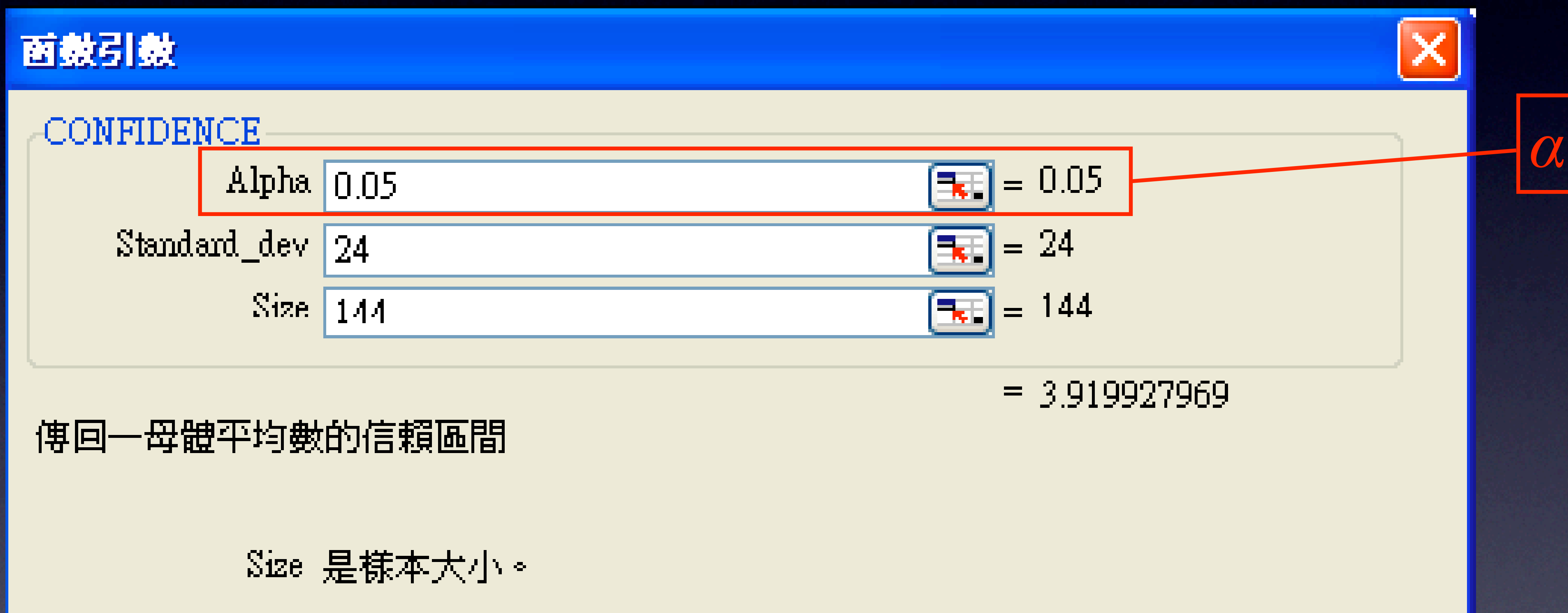
母體平均數 μ 的信賴區間



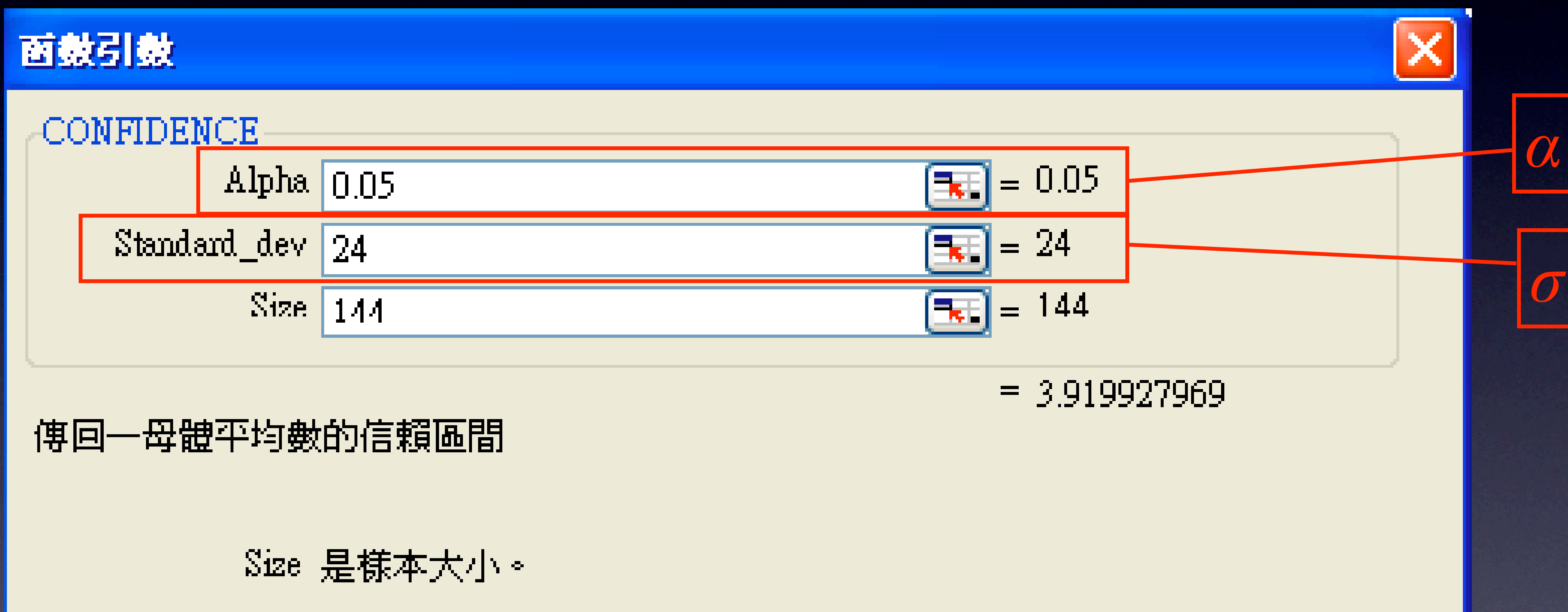
不同信賴水準下母體均數 μ 的信賴區間

信賴水準 $1-\alpha$	α	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$	信賴區間 $\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$
0.90	0.10	0.05	1.645	$\overline{X} \pm 1.645\sigma_{\overline{X}}$
0.95	0.05	0.025	1.96	$\overline{X} \pm 1.96\sigma_{\overline{X}}$
0.99	0.01	0.005	2.575	$\overline{X} \pm 2.575\sigma_{\overline{X}}$

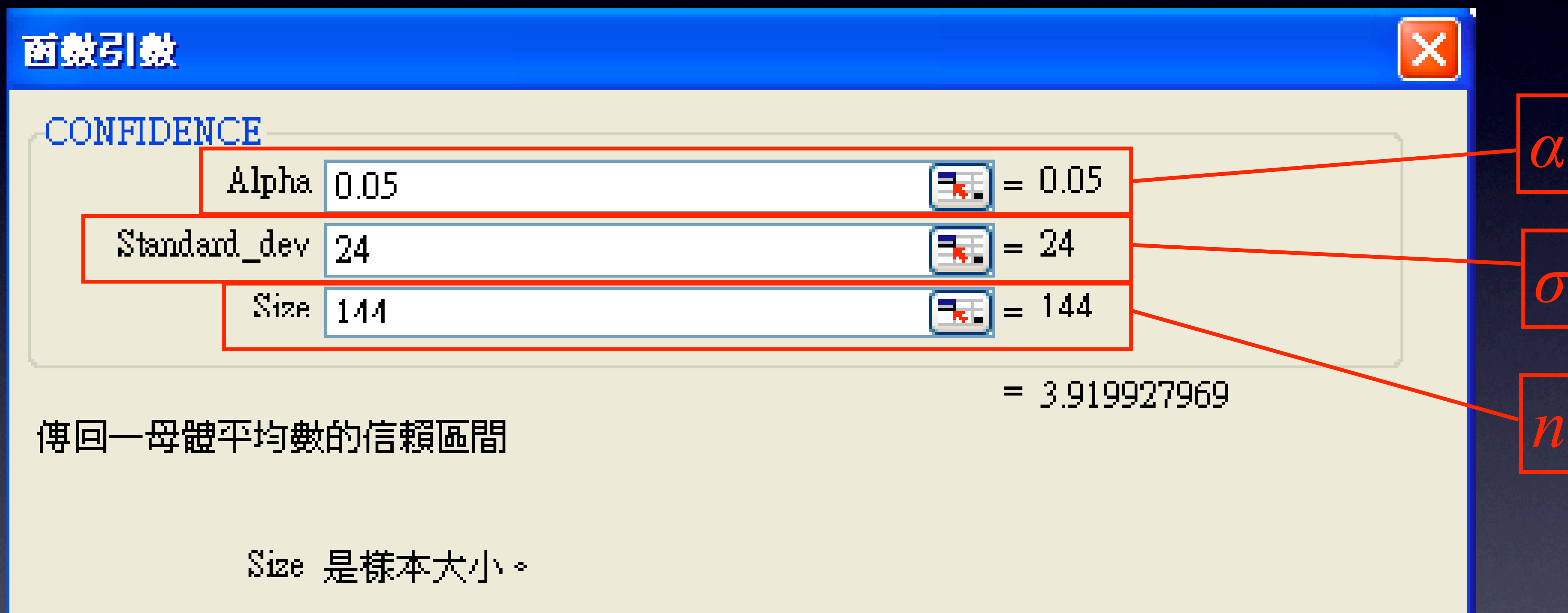
f_x → 統計 → CONFIDENCE



$f_x \rightarrow$ 統計 $\rightarrow$ CONFIDENCE



$f_x \rightarrow$ 統計 $\rightarrow$ CONFIDENCE



影響信賴區間長度的因素

- 所選擇的點估計式的抽樣分配。

影響信賴區間長度的因素

- 所選擇的點估計式的抽樣分配。
- 樣本數。

影響信賴區間長度的因素

- 所選擇的點估計式的抽樣分配。
- 樣本數。
- 機率區間上下限的取法。

影響信賴區間長度的因素

- 所選擇的點估計式的抽樣分配。
- 樣本數。
- 機率區間上下限的取法。
- 信賴係數。

母體平均數的區間估計－小樣本

- 小樣本常態母體變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

母體平均數的區間估計－小樣本

- 小樣本常態母體變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

- 小樣本常態母體變異數未知，母體平均數的信賴區間

自由度 n - 1 的 t 分配

$$\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

t 分配

- 自常態母體 $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 隨機抽取樣本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，則統計量為

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

W. L. Gosset

t 分配

- t 分配的性質

  1. t 分配為一個以平均數 0 為中心的對稱分配，不同的自由度 v 有不同的 t 分配。

t 分配

- t 分配的性質

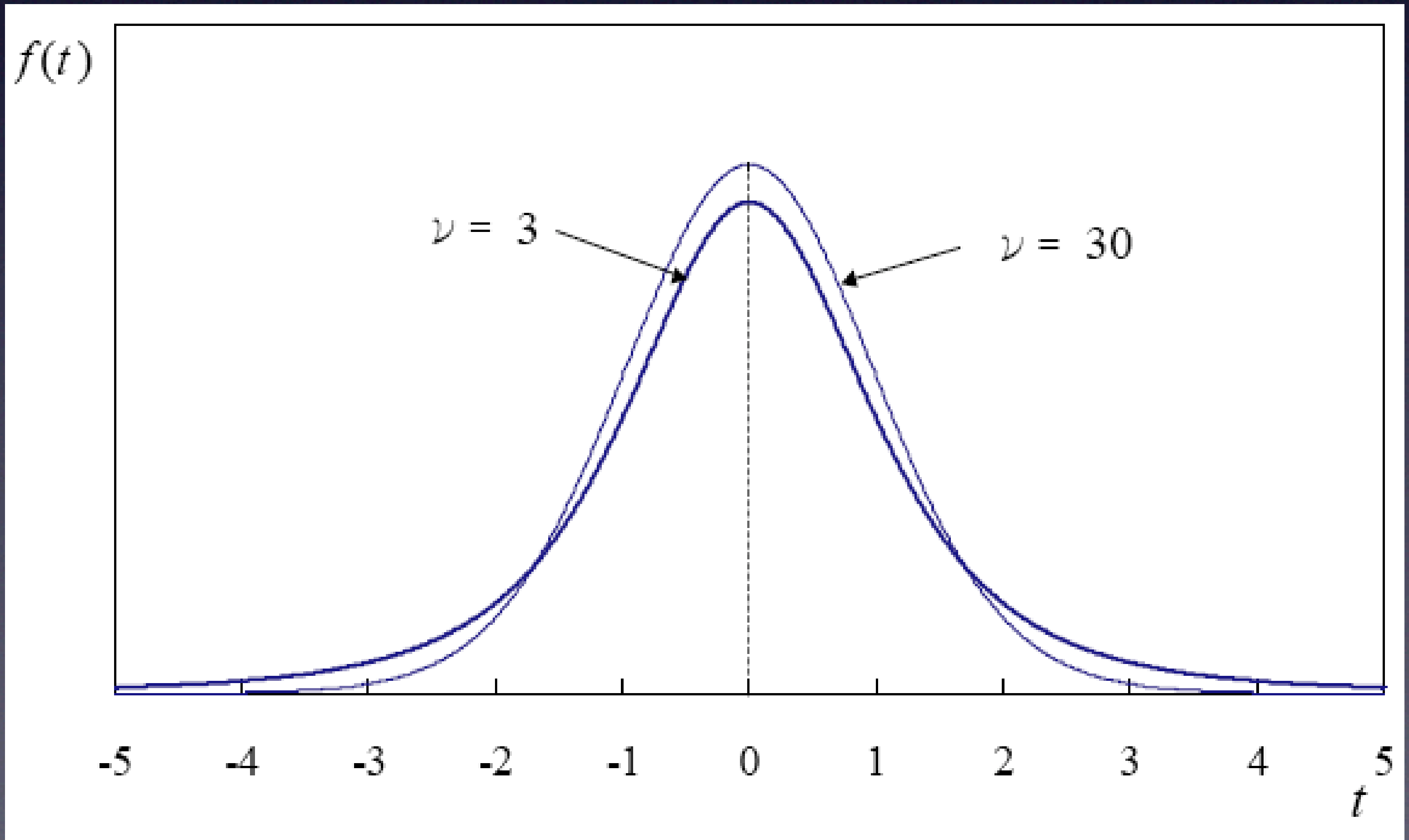
  1. t 分配為一個以平均數 0 為中心的對稱分配，不同的自由度 v 有不同的 t 分配。

自由度：統計量中隨機變量可以自由變動的數目（個數）。

t 分配

- t 分配的性質

  1. t 分配為一個以平均數 0 為中心的對稱分配，不同的自由度 ν 有不同的 t 分配。



t 分配

- t 分配的性質

  1. t 分配為一個以平均數 0 為中心的對稱分配，不同的自由度 v 有不同的 t 分配。

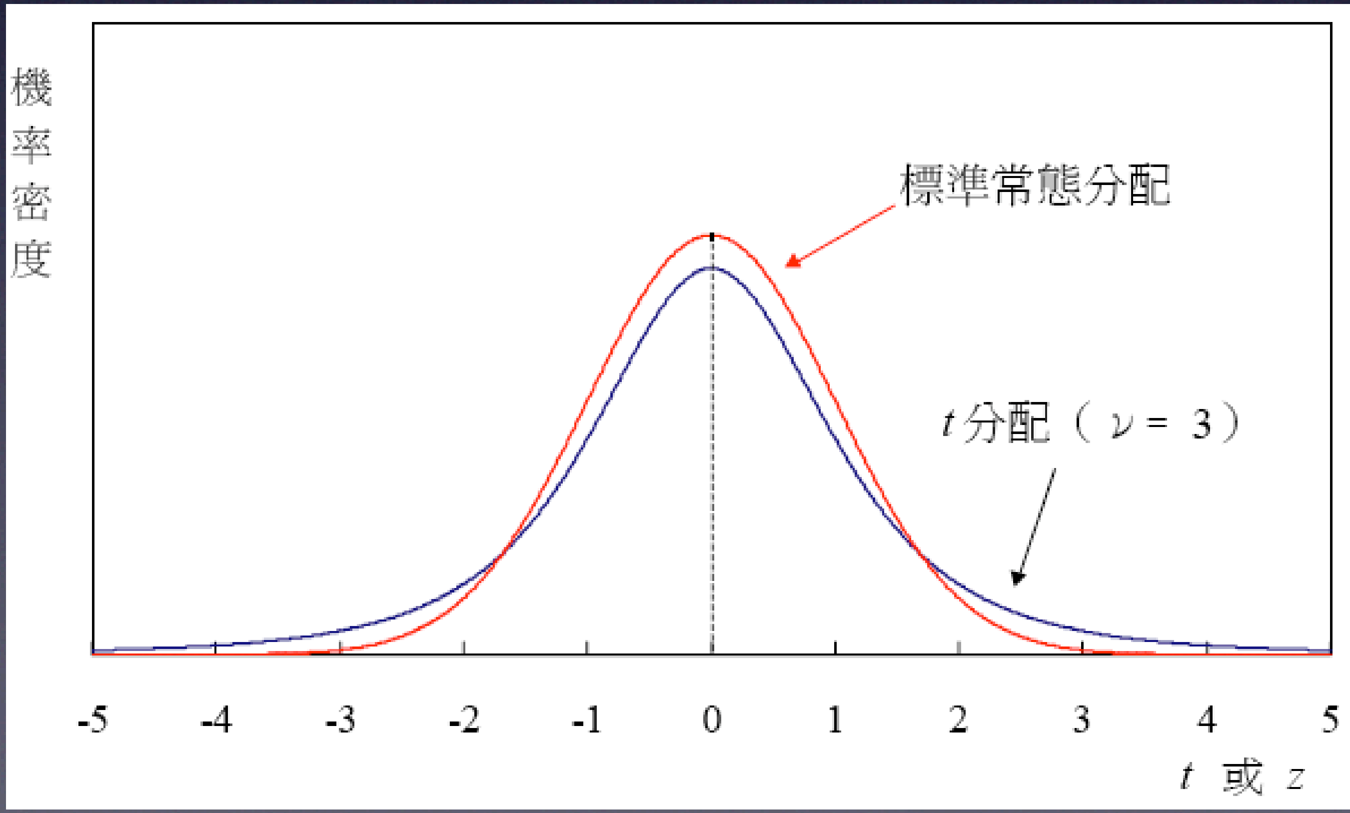
  2. t 分配不與橫軸相交。t 分配曲線下的總面積等於 1。

t 分配

- t 分配的性質

1. t 分配為一個以平均數 0 為中心的對稱分配，不同的自由度 ν 有不同的 t 分配。

2. t 分配不與橫軸相交。t 分配曲線下的總面積等於 1。



t 分配

- t 分配的性質

1. t 分配為一個以平均數 0 為中心的對稱分配，不同的自由度 v 有不同的 t 分配。
2. t 分配不與橫軸相交。t 分配曲線下的總面積等於 1。
3. t 分配決定於自由度 v，它是 t 分配唯一的參數。

t 分配

- t 分配的性質

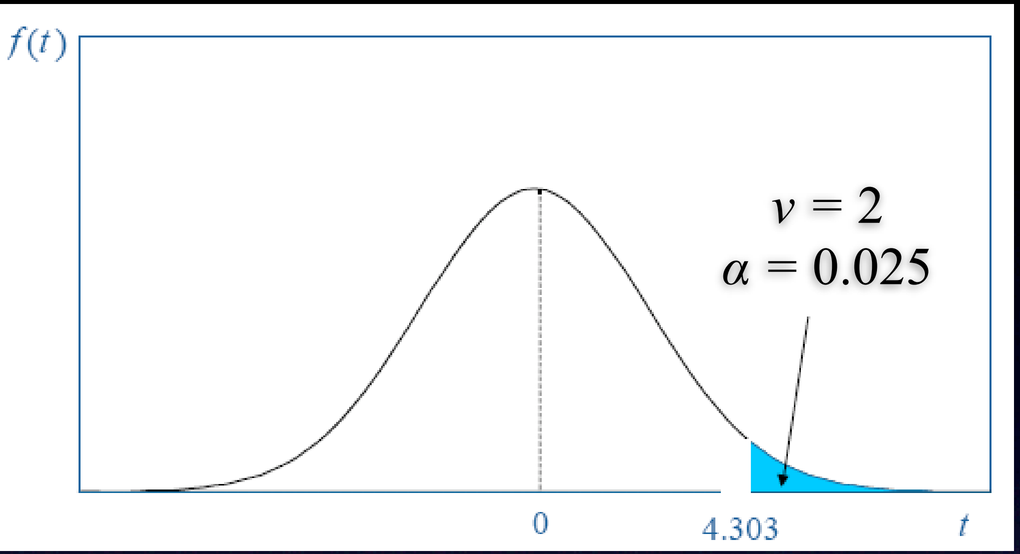
1. t 分配為一個以平均數 0 為中心的對稱分配，不同的自由度 v 有不同的 t 分配。
2. t 分配不與橫軸相交。t 分配曲線下的總面積等於 1。
3. t 分配決定於自由度 v，它是 t 分配唯一的參數。
4. 自由度趨近於無窮大時 $(v \rightarrow \infty)$，t 分配趨近於標準常態分配，即 $t_v \sim N(0\ ,\ 1)$。一般若 $v \geq 30$，則以標準常態分配代替 t 分配

t 值表

$d.f.$	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	$d.f.$
1	3.078	6.314	10.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.473	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.449	7
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	∞

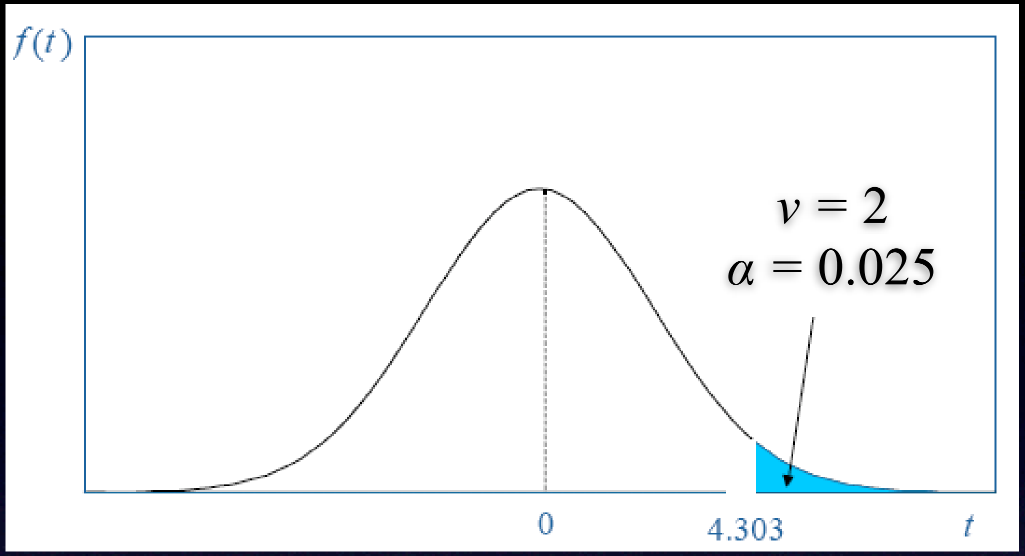
t 值表

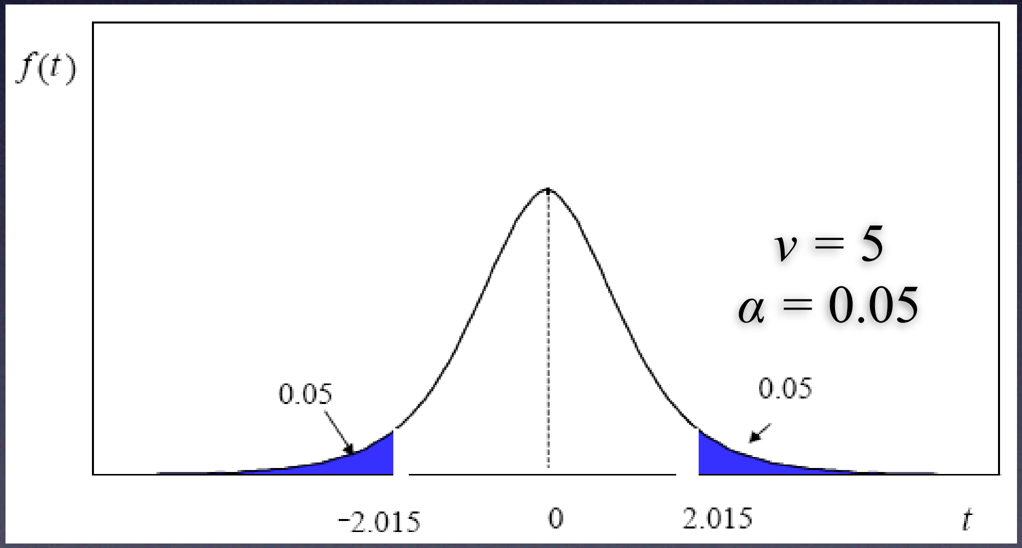
$d.f.$	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	$d.f.$
1	3.078	6.314	10.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.473	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.449	7
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	∞



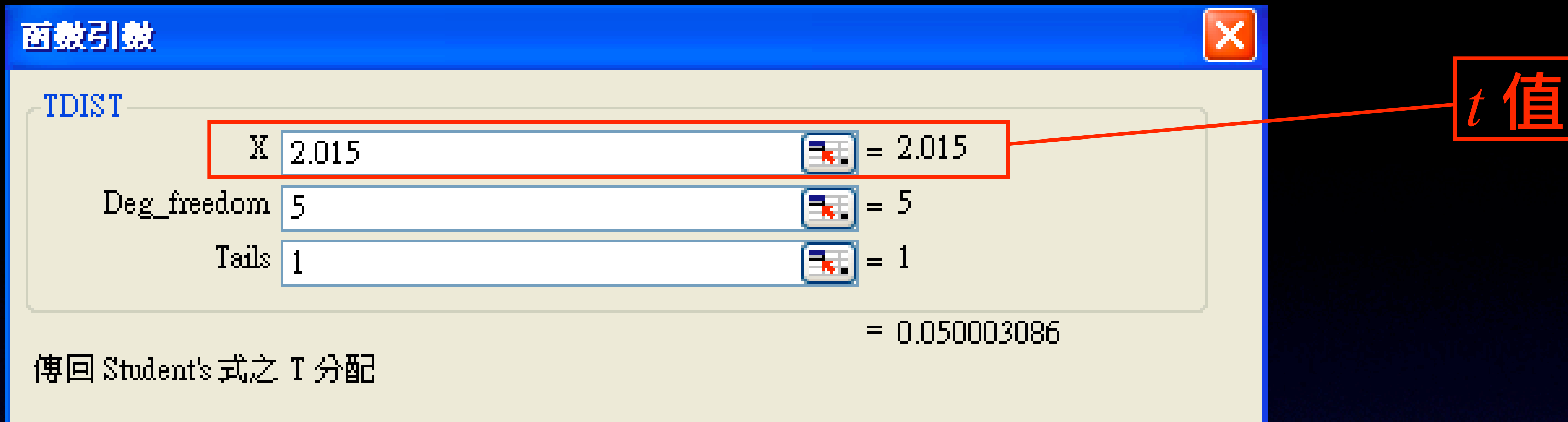
t 值表

$d.f.$	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	$d.f.$
1	3.078	6.314	10.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.473	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.449	7
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	∞



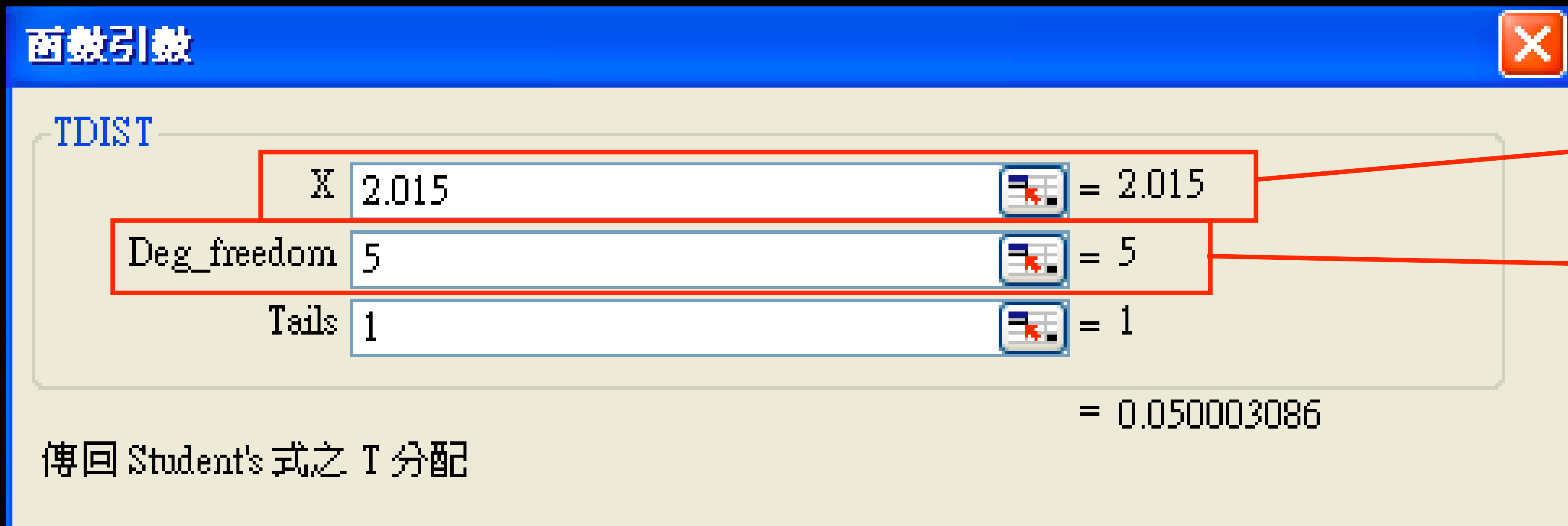


利用 Excel 求 t 分配的機率值



（f_x → 統計 → TDIST）

利用 Excel 求 t 分配的機率值

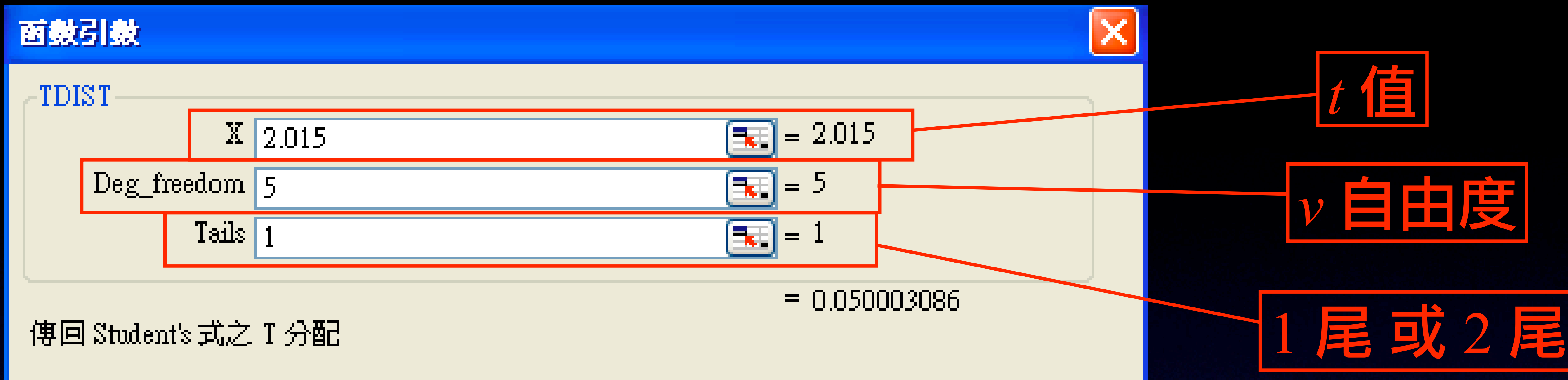


t 值

v 自由度

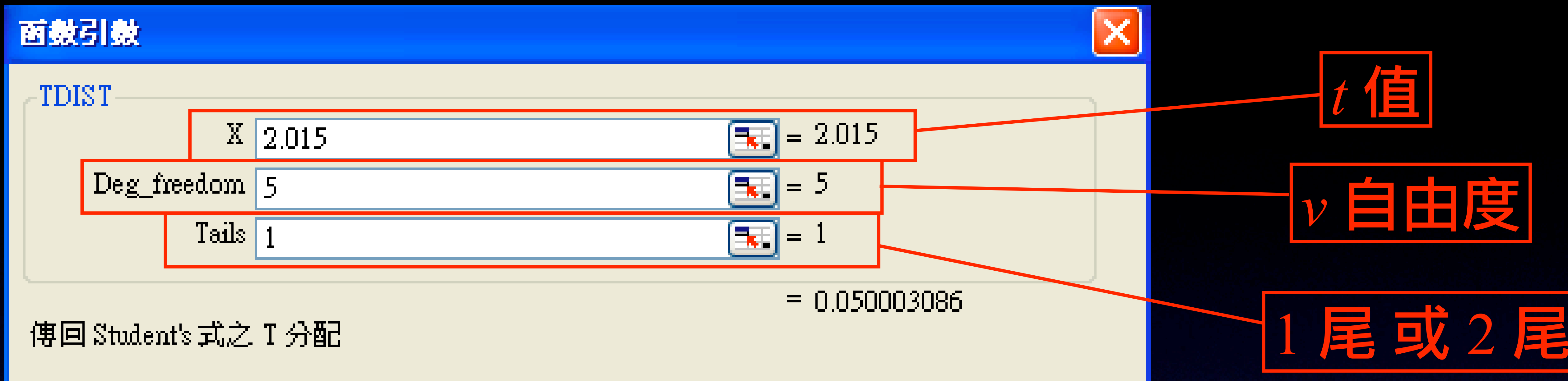
（f_x → 統計 → TDIST）

利用 Excel 求 t 分配的機率值



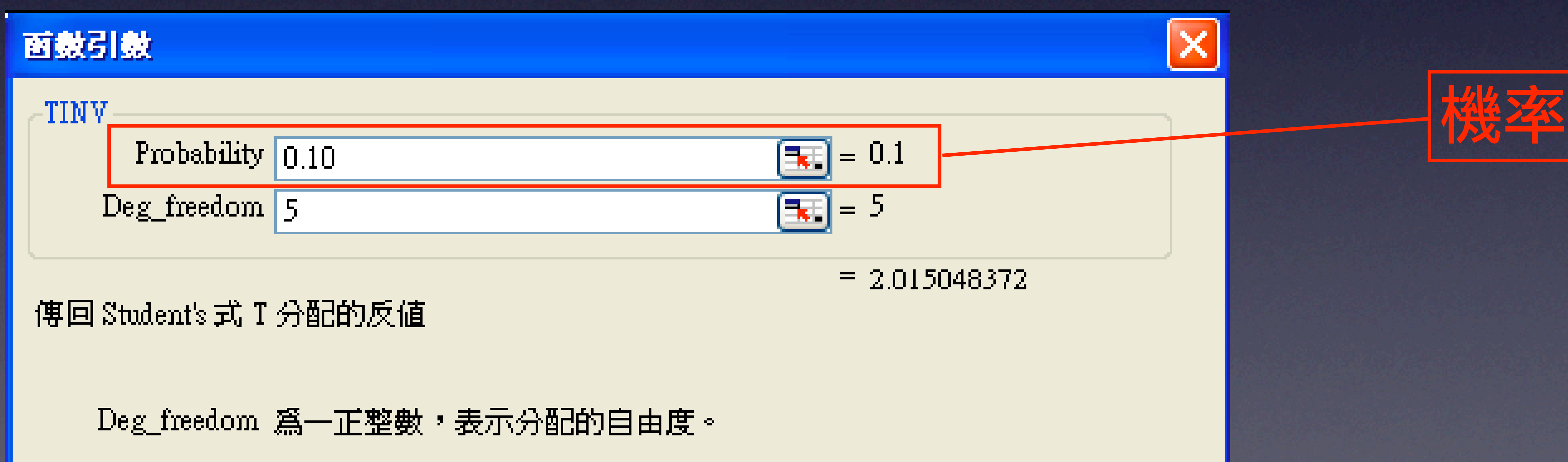
(f_x → 統計 → TDIST)

利用 Excel 求 t 分配的機率值



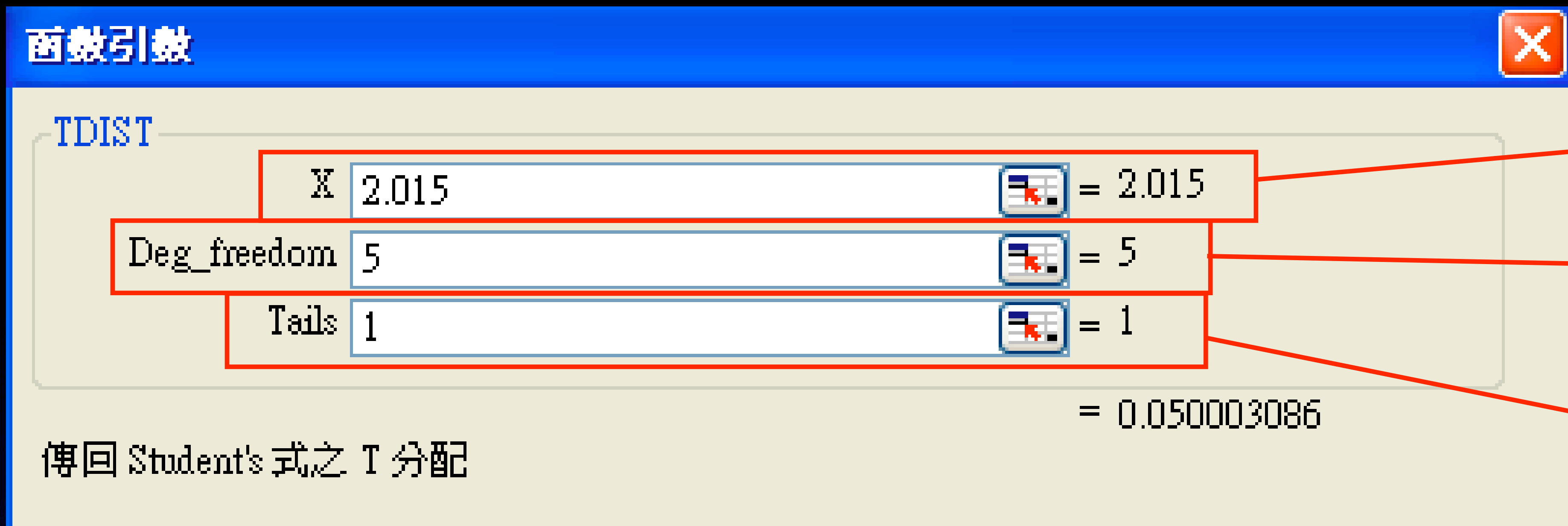
(f_x → 統計 → TDIST)

利用 Excel 求 t 值



(f_x → 統計 → TINV)

利用 Excel 求 t 分配的機率值



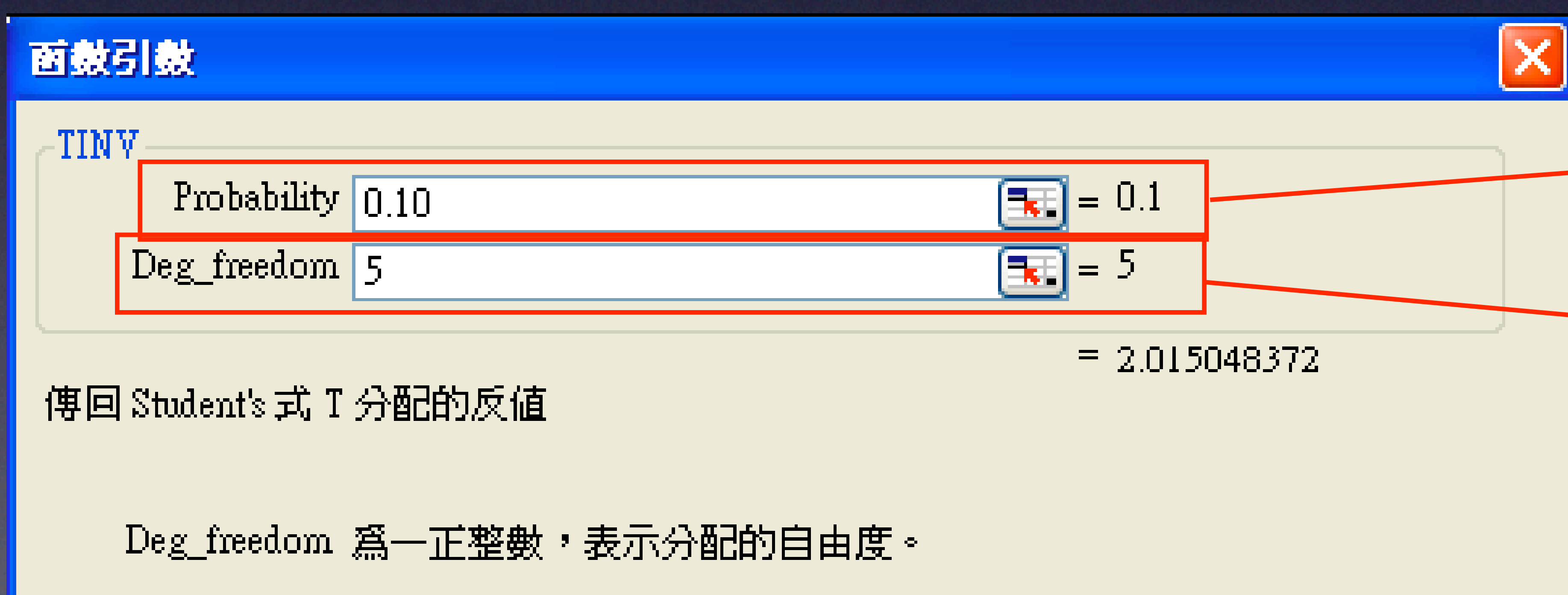
t 值

ν 自由度

1 尾或 2 尾

(f_x → 統計 → TDIST)

利用 Excel 求 t 值

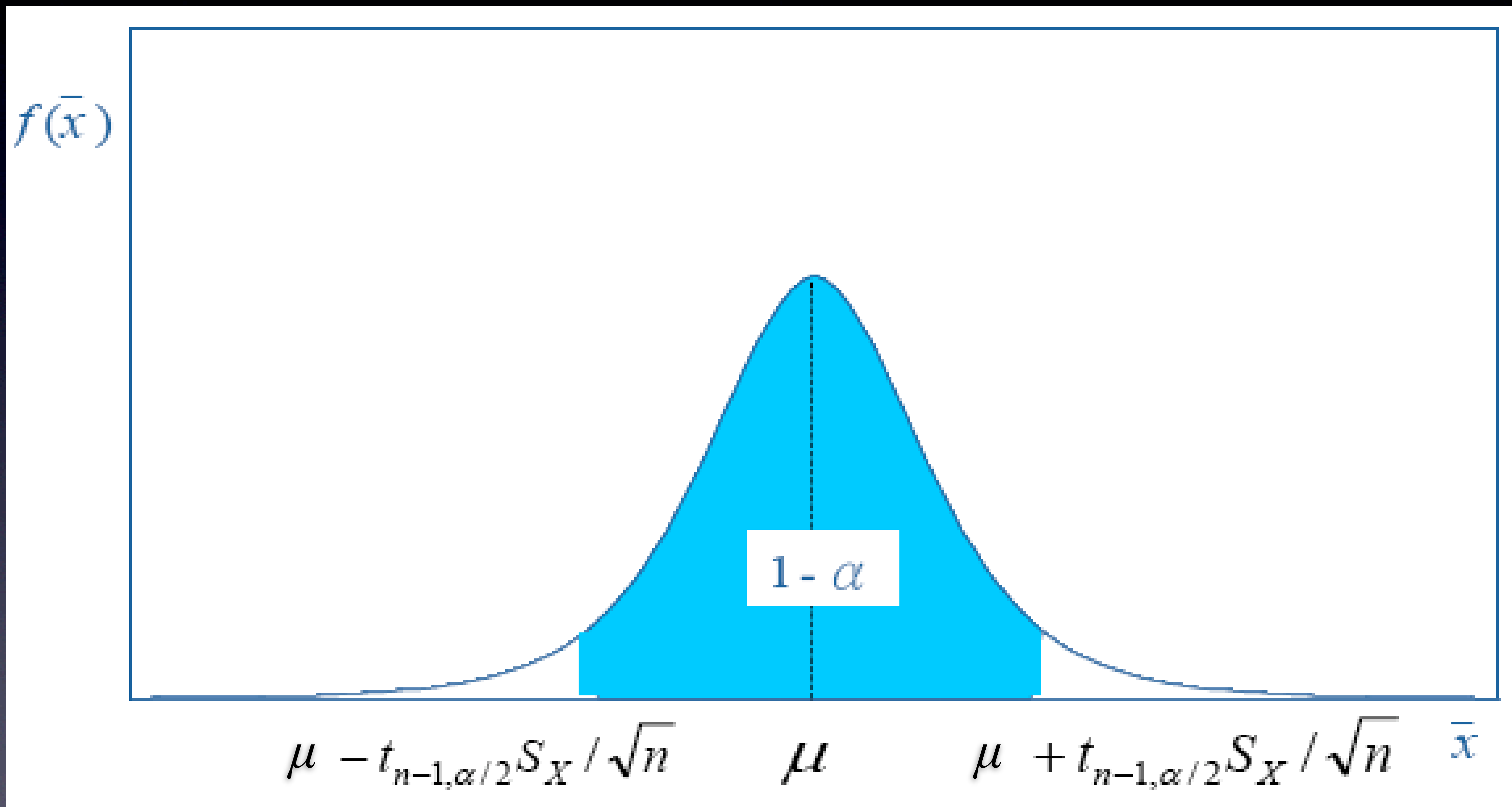


機率

ν 自由度

(f_x → 統計 → TINV)

$(1-\alpha)\overline{X}$ 的信賴區間



母體比例的區間估計

- 大樣本母體比例的信賴區間

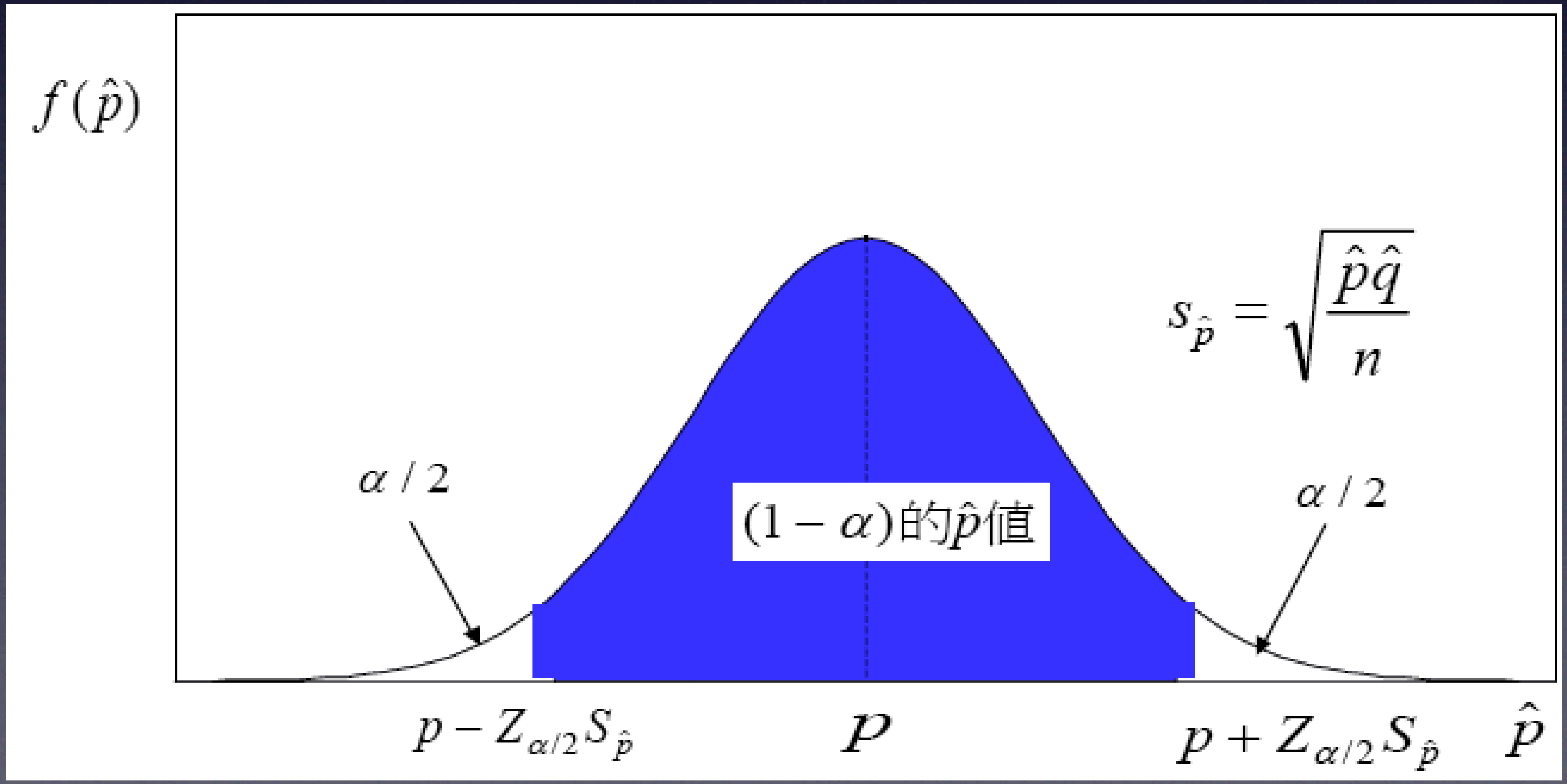
$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

母體比例的區間估計

- 大樣本母體比例的信賴區間

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$(1-\alpha)\hat{p}$ 的機率區間



母體比例的區間估計

- 大樣本母體比例的信賴區間

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

- 常用公式

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}}$$

母體比例的區間估計

- 大樣本母體比例的信賴區間

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

- 常用公式

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}}$$

- 民意調查的信賴區間

  支持率 ± 抽樣誤差

樣本數的選擇

- 估計母體平均數時樣本數的選擇
  - 估計誤差不差過 d 值

$$\overline{X} - \mu = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

樣本數的選擇

- 估計母體平均數時樣本數的選擇
  - 估計誤差不差過 d 值

$$\overline{X} - \mu = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

  - 估計母體平均數時的樣本數

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{d^2}$$

樣本數的選擇

- 估計母體平均數時樣本數的選擇
  - 估計誤差不差過 d 值

$$\overline{X} - \mu = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

  - 估計母體平均數時的樣本數

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{d^2}$$

  - 估計母體平均數時的樣本數（母體變異數未知）

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 S^2}{d^2}$$

樣本數的選擇

- 估計母體比例時樣本數的選擇
  - 估計母體比例時的樣本數

$$n \geq \frac{Z^2_{\alpha/2}\hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

樣本數的選擇

- 估計母體比例時樣本數的選擇
  - 估計母體比例時的樣本數

$$n \geq \frac{Z^2_{\alpha/2}\hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

  - 常用公式

$$n \geq \frac{Z^2_{\alpha/2}(0.25)}{d^2}$$

母體變異數的區間估計

- 卡方分配
  - 樣本變異數

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

  - 卡方統計量

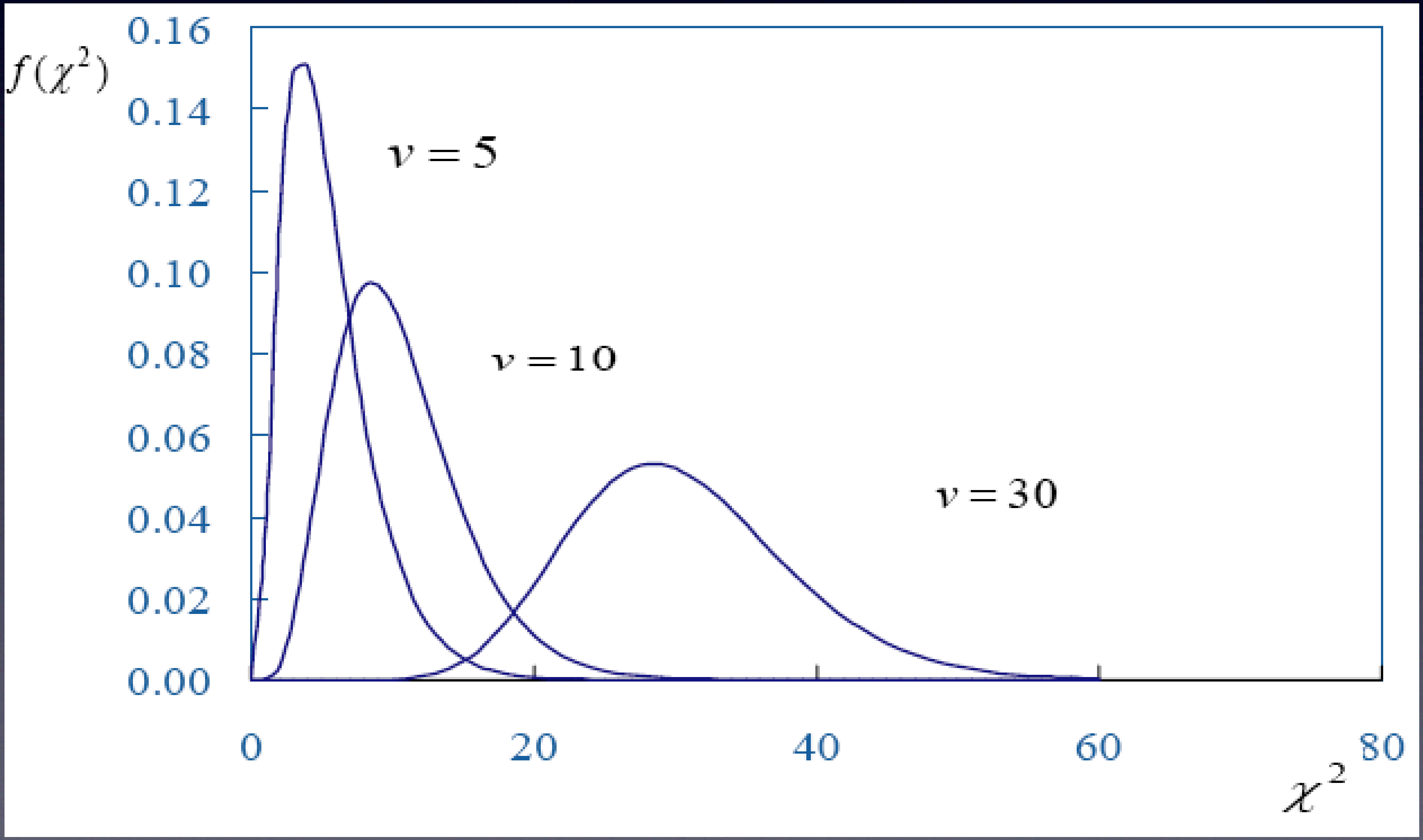
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

卡方分配的性質

1. 卡方分配為一定義在大於等於 0（正數）範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。

卡方分配的性質

1. 卡方分配為一定義在大於等於 0（正數）範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。



卡方分配的性質

1. 卡方分配為一定義在大於等於 0（正數）範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。

2. 卡方分配只有一個參數，即自由度，表為 v。卡方分配的平均數與變異數為：

$$E(\chi^2_v) = v \text{，} V(\chi^2_v) = 2v$$

卡方分配的性質

1. 卡方分配為一定義在大於等於 0（正數）範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。
2. 卡方分配只有一個參數，即自由度，表為 v。卡方分配的平均數與變異數為：

$$E(\chi^2_v) = v \text{，} V(\chi^2_v) = 2v$$

3. 卡方分配隨自由度增加而逐漸對稱，當自由度趨近於無窮大時（$v \to \infty$），卡方分配會趨近於常態分配。

卡方分配的性質

1. 卡方分配為一定義在大於等於 0（正數）範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。

2. 卡方分配只有一個參數，即自由度，表為 v。卡方分配的平均數與變異數為：

$$E(\chi^2_v) = v \text{，} V(\chi^2_v) = 2v$$

3. 卡方分配隨自由度增加而逐漸對稱，當自由度趨近於無窮大時（$v \to \infty$），卡方分配會趨近於常態分配。

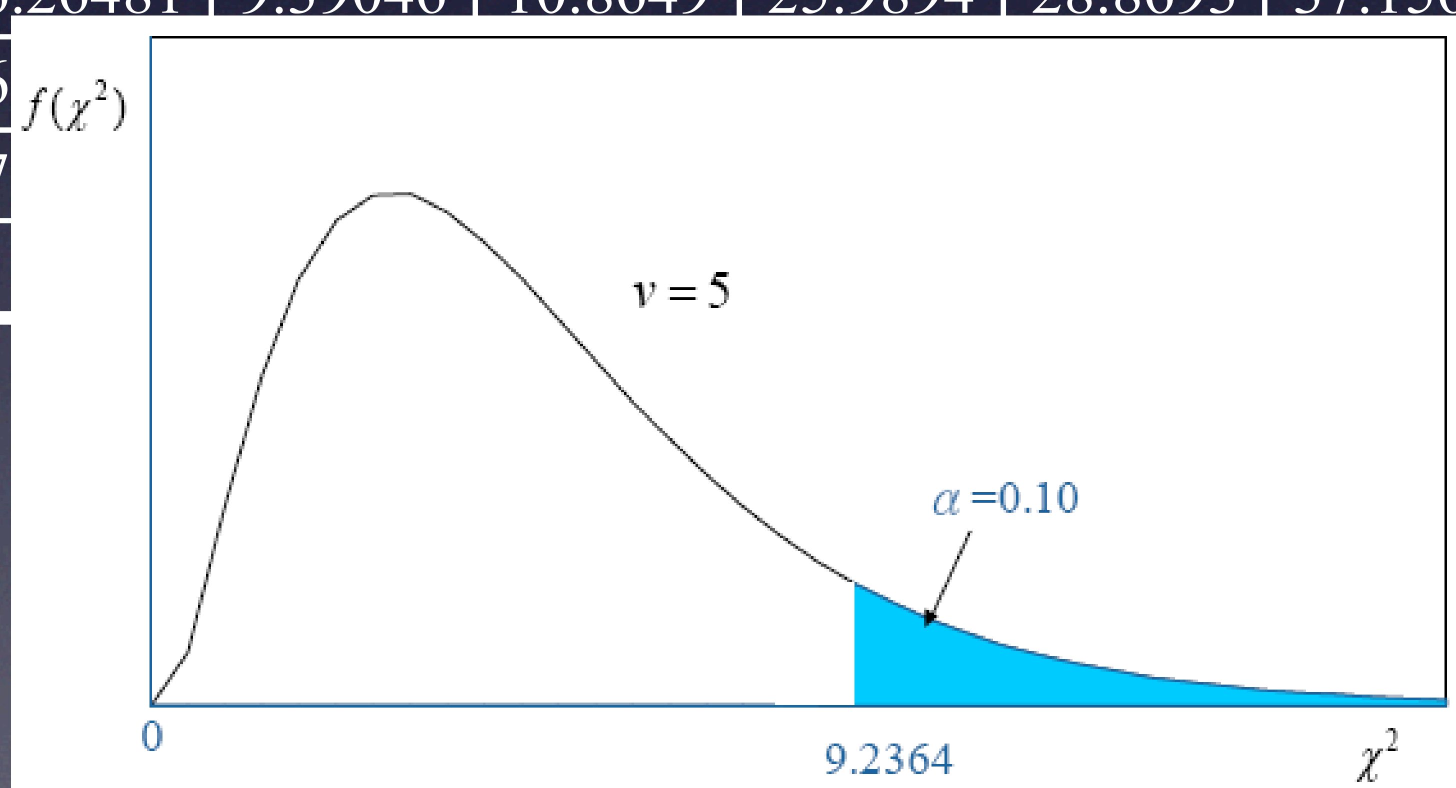
4. 令 $Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$，則 Z^2 為自由度 1 的卡方分配。

卡方值

$d.f$	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.005}$	$d.f$
1	.0000393	.0039321	.0157908	2.70554	3.84146	7.87944	1
2	.0100251	.102587	.21072	4.60517	5.99147	10.5966	2
3	.0717212	.351846	.584375	6.25139	7.81473	12.8381	3
4	.20699	.710721	1.063623	7.77944	9.48773	14.8602	4
5	.41174	1.145476	1.61031	9.23635	10.0705	16.7496	5
6	.675727	1.63539	2.20413	10.6446	12.5916	18.5476	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	5.69724	8.67176	10.0852	24.769	27.5871	35.7185	17
18	6.26481	9.39046	10.8649	25.9894	28.8693	37.1564	18
19	6.84398	10.117	10.6509	27.2036	30.1435	38.5822	19
20	7.43386	10.8508	12.4426	28.412	31.4104	39.9968	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

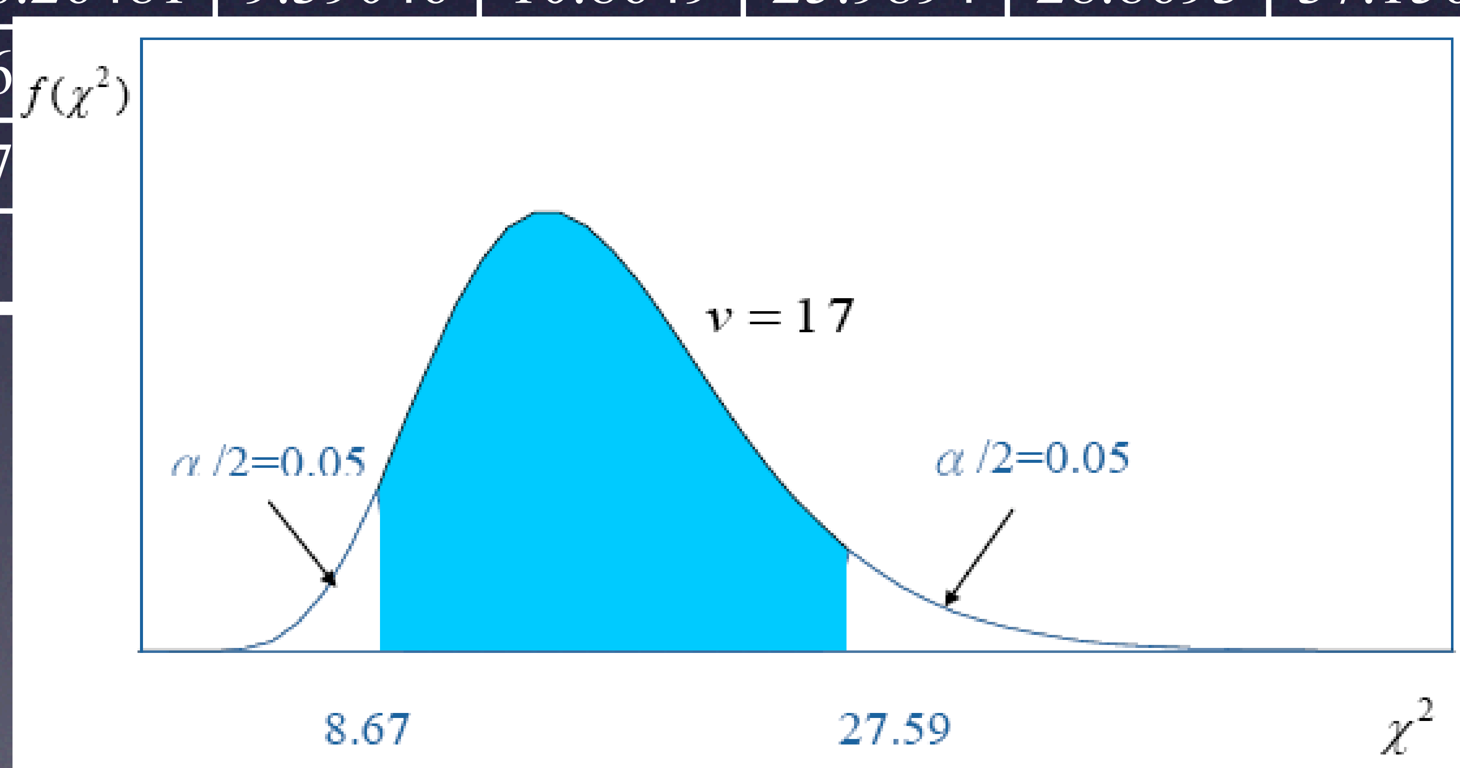
卡方值

d.f	$\chi^2{}_{0.995}$	$\chi^2{}_{0.95}$	$\chi^2{}_{0.90}$	$\chi^2{}_{0.10}$	$\chi^2{}_{0.05}$	$\chi^2{}_{0.005}$	d.f
1	.0000393	.0039321	.0157908	2.70554	3.84146	7.87944	1
2	.0100251	.102587	.21072	4.60517	5.99147	10.5966	2
3	.0717212	.351846	.584375	6.25139	7.81473	12.8381	3
4	.20699	.710721	1.063623	7.77944	9.48773	14.8602	4
5	.41174	1.145476	1.61031	9.23635	10.0705	16.7496	5
6	.675727	1.63539	2.20413	10.6446	12.5916	18.5476	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	5.69724	8.67176	10.0852	24.769	27.5871	35.7185	17
18	6.26481	9.39046	10.8649	25.9894	28.8693	37.1564	18
19	6[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]2	19
20	7[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]8	20
⋮							⋮

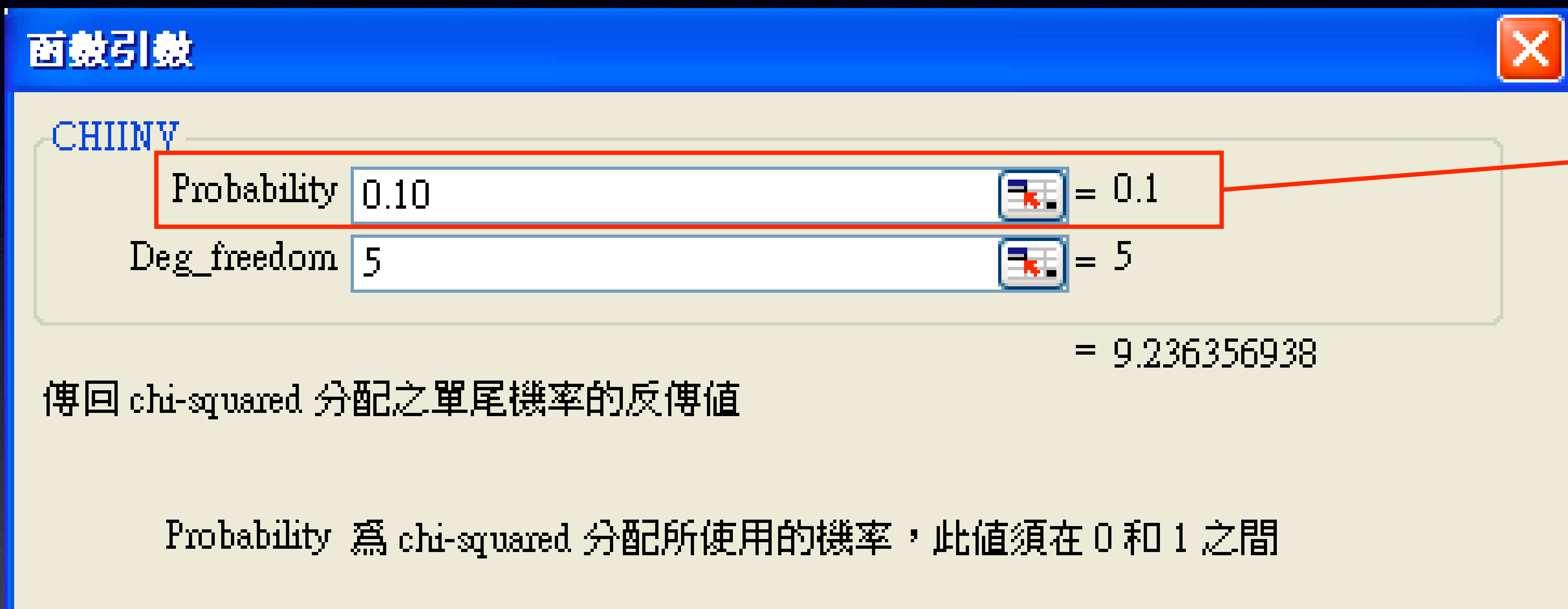


卡方值

d.f	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.005}$	d.f
1	.0000393	.0039321	.0157908	2.70554	3.84146	7.87944	1
2	.0100251	.102587	.21072	4.60517	5.99147	10.5966	2
3	.0717212	.351846	.584375	6.25139	7.81473	12.8381	3
4	.20699	.710721	1.063623	7.77944	9.48773	14.8602	4
5	.41174	1.145476	1.61031	9.23635	10.0705	16.7496	5
6	.675727	1.63539	2.20413	10.6446	12.5916	18.5476	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	5.69724	8.67176	10.0852	24.769	27.5871	35.7185	17
18	6.26481	9.39046	10.8649	25.9894	28.8693	37.1564	18
19	6					2	19
20	7					8	20
⋮							⋮



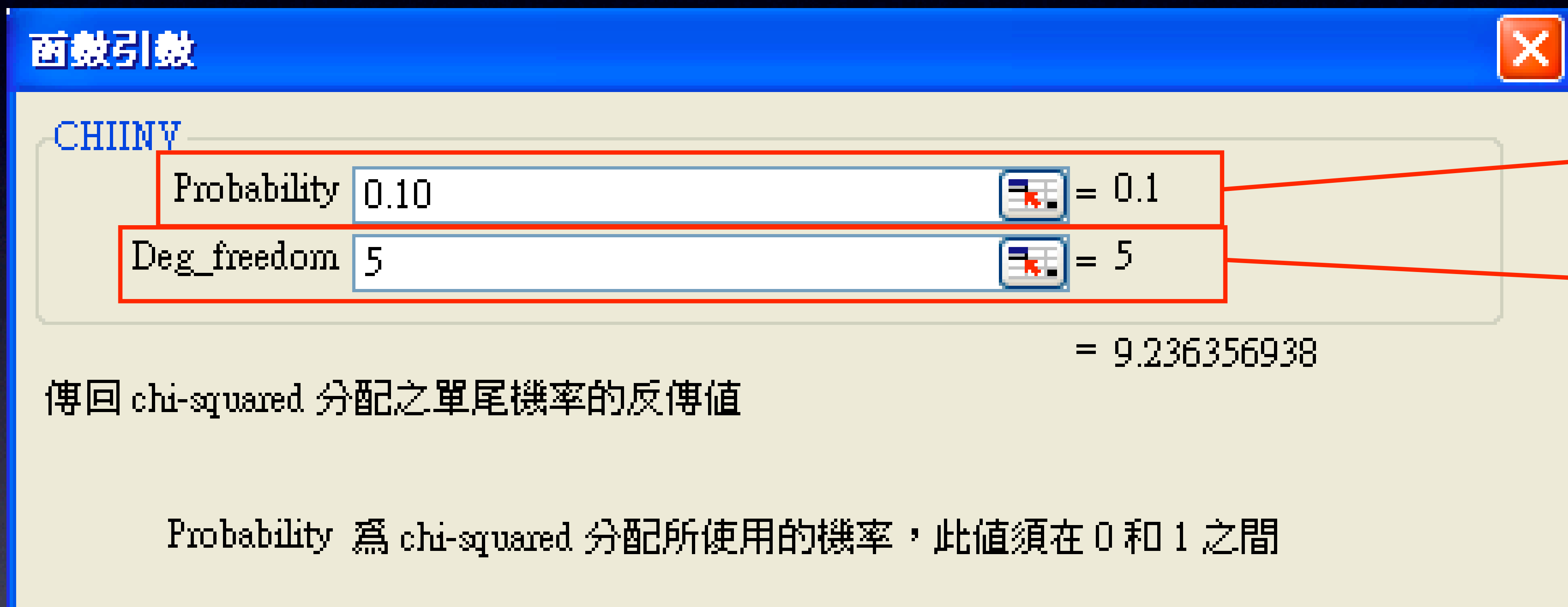
利用 Excel 計算卡方值



機率值

$f_x \to$ 統計 $\to$ CHIINV

利用 Excel 計算卡方值



機率值

v 自由度

$f_x \rightarrow$ 統計 $\rightarrow$ CHIINV

母體變異數的區間估計

- 母體變異數的信賴區間

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

母體變異數的區間估計

- 母體變異數的信賴區間

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

$(1-\alpha)\chi^2$ 值的機率區間