第五章

機率論

學習目的

1. 定義機率。

學習目的

1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。

學習目的

1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3. 描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。

學習目的

1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3. 描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
4. 熟習聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。

學習目的

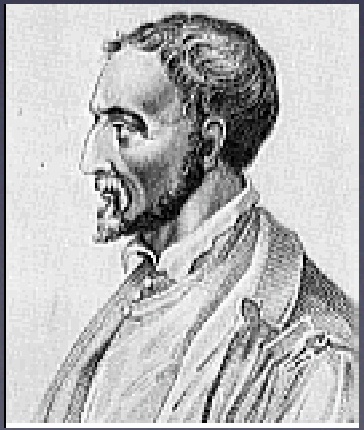
1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3. 描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
4. 熟習聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。
5. 學習獨立、不獨立與互斥事件間的相互關係。

學習目的

1. 定義機率。
2. 了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3. 描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
4. 熟習聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。
5. 學習獨立、不獨立與互斥事件間的相互關係。
6. 認識貝氏定理及應用貝氏定理。

本章結構

- 機率論
  - 隨機實驗
    - 隨機實驗的意義
    - 隨機實驗的基本觀念
  - 機率理論
    - 機率理論的種類
    - 三個機率理論的比較
    - 機率的公理體系
  - 事件機率
    - 事件機率的定義
    - 聯合機率
    - 邊際機率
    - 條件機率
  - 事件的性質與事件機率的運算
    - 事件的性質與關連
    - 事件機率的運算法則
  - 貝氏定理
  - Excel 的使用



J. Cardano

P. D. Fermat

應用統計學 林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2006

隨機實驗

- 隨機
  隨機是指一個現象事先無法預知是否發生，但在長期多次重複實驗之後，該現象的發生會出現有規則的型態。

隨機實驗

- **隨機**

  隨機是指一個現象事先無法預知是否發生，但在長期多次重複實驗之後，該現象的發生會出現有規則的型態。

- **隨機實驗的意義**

  隨機實驗是一種過程(process)，是一種不能確定預知會發生何種結果的實驗方式。在實驗前已知所有可能出現的結果，而實驗後的結果為所有可能的結果之一，但實驗前並未能正確的、肯定的預知它是何種結果。隨機實驗可重複進行，而經過長期重複實驗，出現的結果會遵循某一些統計規則。

隨機實驗

隨機實驗、出象與樣本空間

隨機實驗	出象	樣本空間
產品品質檢驗	良品，不良品	$S=\{$良品 , 不良品$\}$
一場足球賽	贏，輸，和	$S=\{$贏 , 輸 , 和$\}$
丟一個骰子 1 次	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
新生小孩的性別	男性，女性	$S=\{$男性 , 女性$\}$

隨機實驗的基本觀念

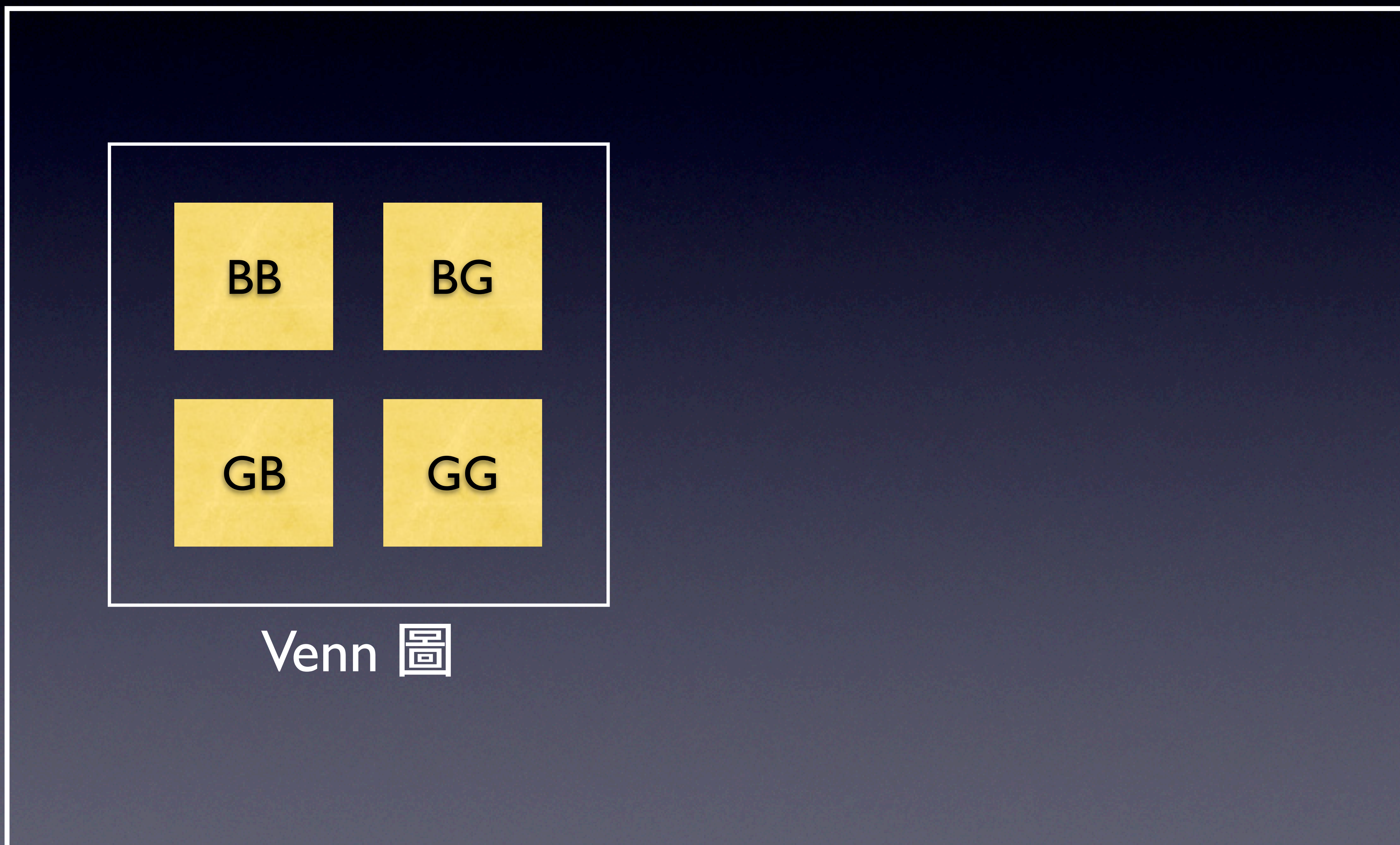
- **基本出象**
  隨機實驗的每個可能的結果稱為基本出象，又稱為樣本點。

隨機實驗的基本觀念

- **基本出象**
  隨機實驗的每個可能的結果稱為基本出象，又稱為樣本點。
- **樣本空間**
  一個隨機實驗中，所有可能出象的集合稱為樣本空間。通常以英文大寫字母 S 表示之。

隨機實驗的基本觀念

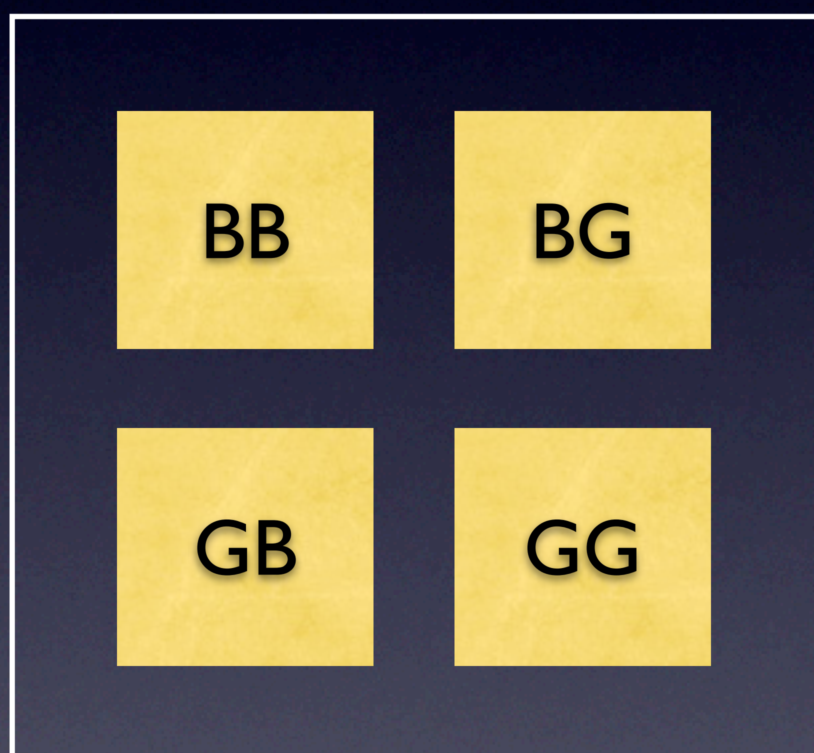
兩個小孩家庭的樣本空間



Venn 圖

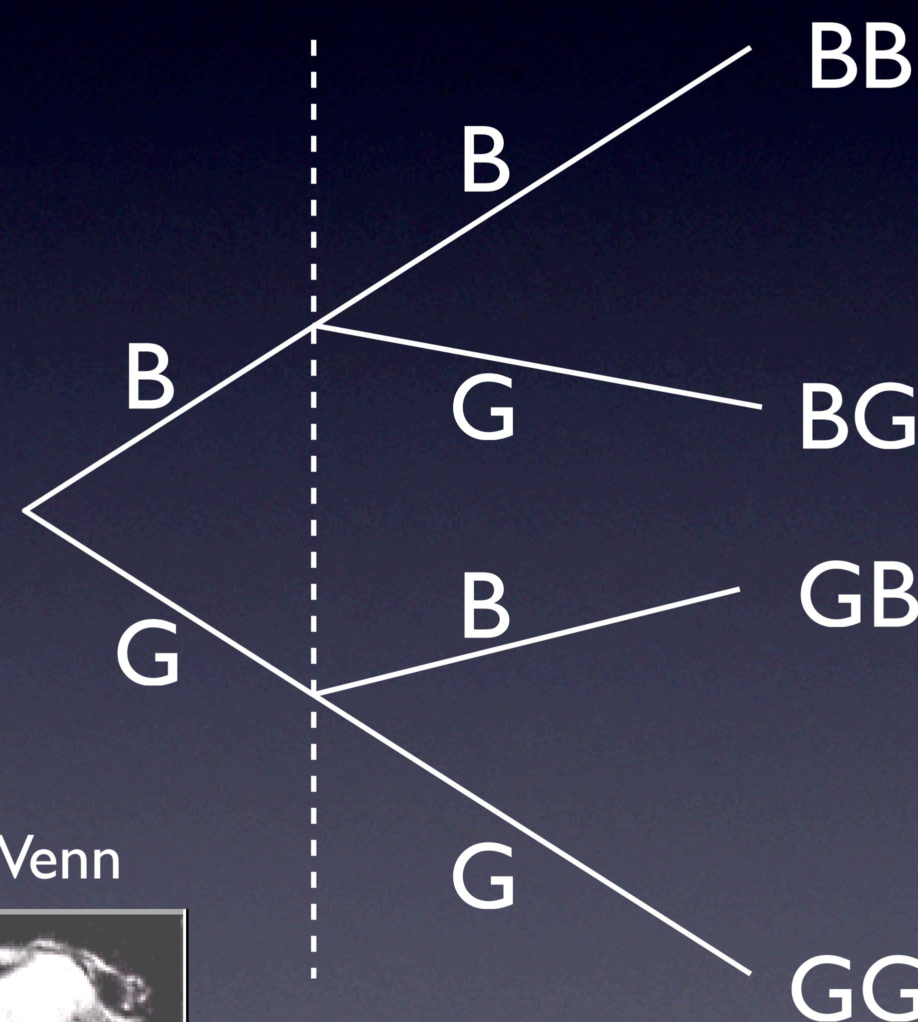
隨機實驗的基本觀念

兩個小孩家庭的樣本空間



Venn 圖

J.Venn



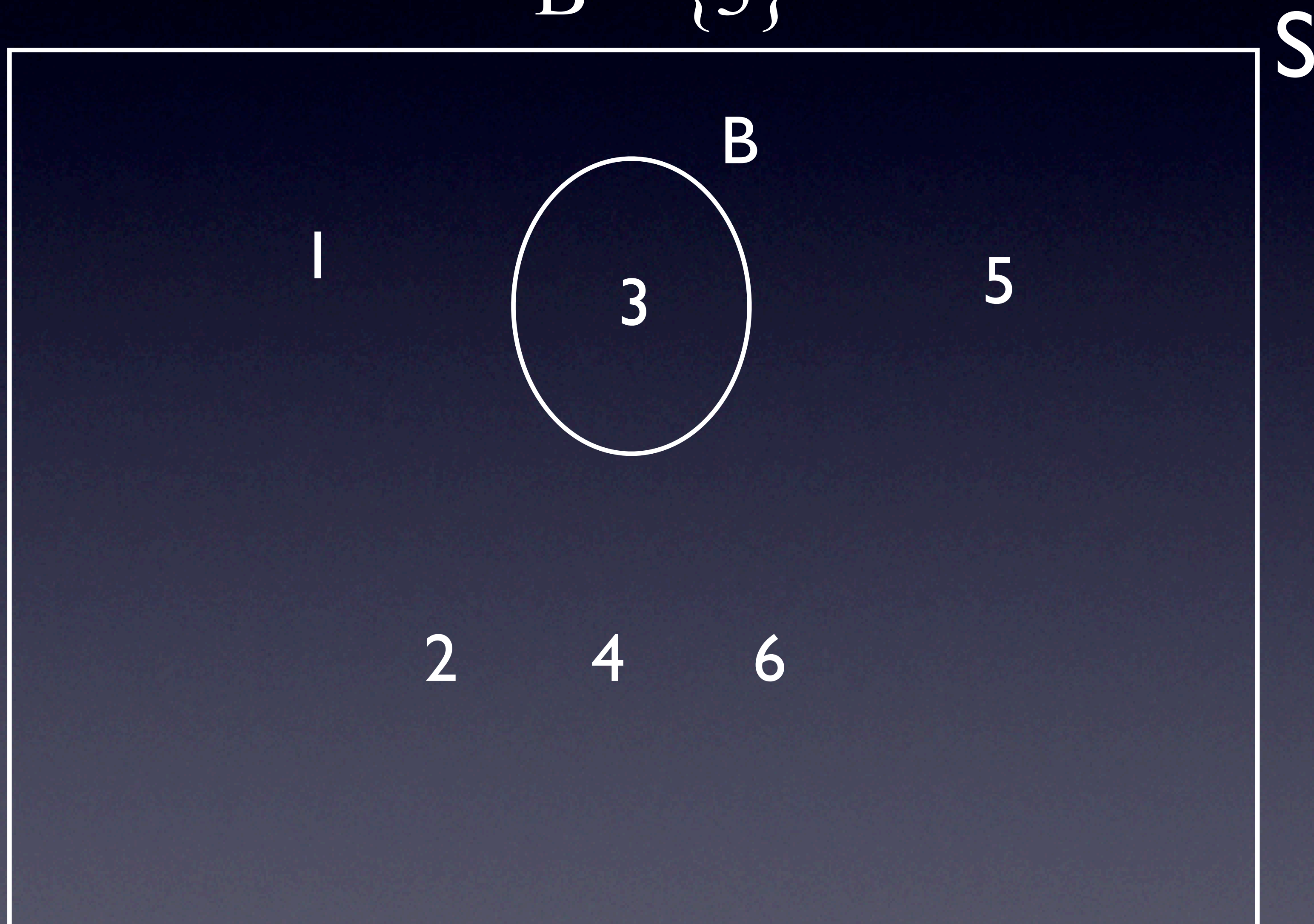
樹枝圖

隨機實驗的基本觀念

- 事件
  樣本空間的部份集合稱為事件。

隨機實驗的基本觀念

$B = \{3\}$

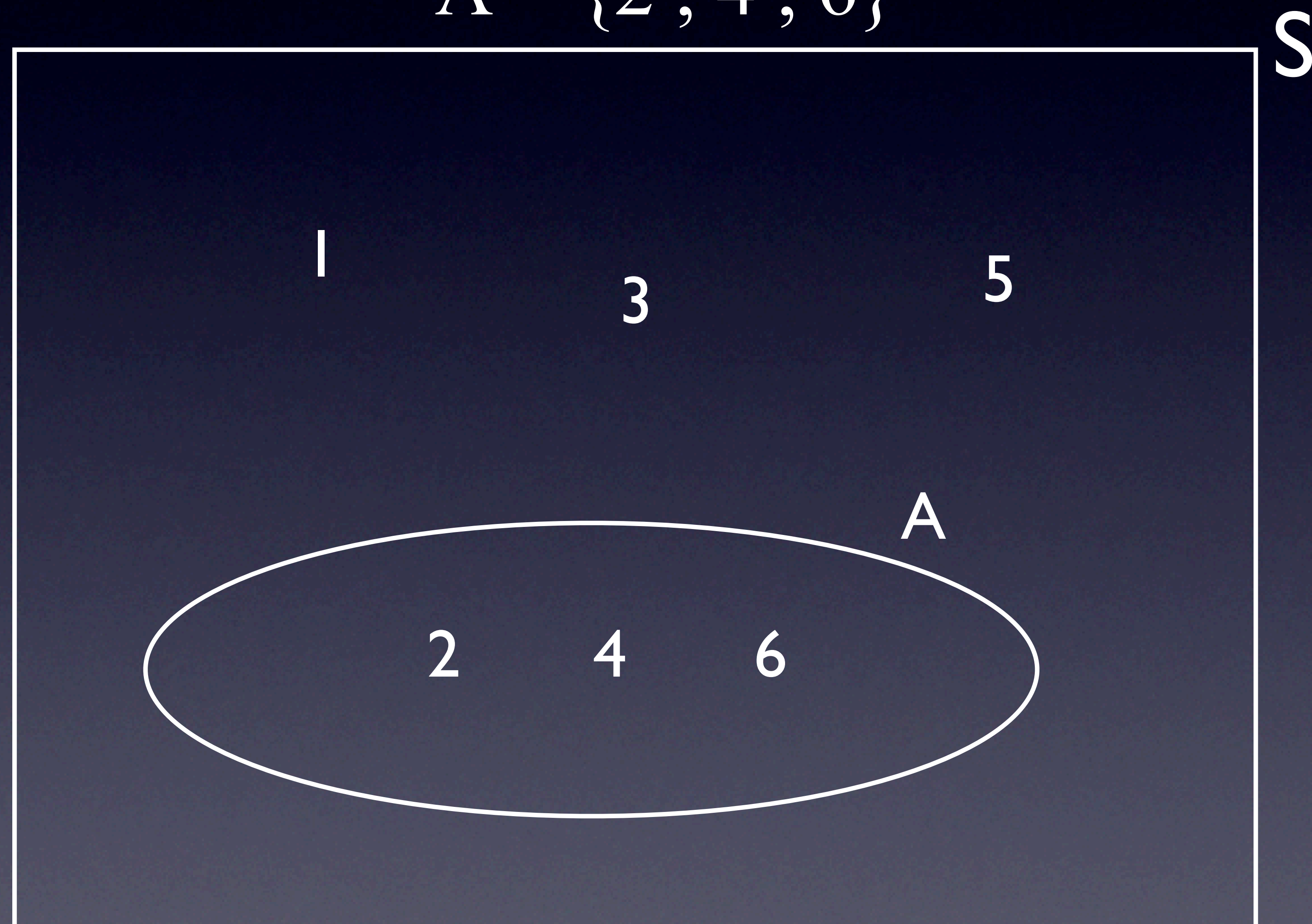


簡單事件

事件只包含一個基本出象者稱為簡單事件。

隨機實驗的基本觀念

$A = \{2, 4, 6\}$



複合事件

事件包含二個或二個以上基本出象者稱為複合事件。

計算樣本點的法則

- 乘數定理

計算樣本點的法則

- 乘數定理
- 排列

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

計算樣本點的法則

- 乘數定理
- 排列

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

- 組合

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!}$$

機率理論

- 古典的機率理論

$$P(E) = \frac{1}{N}$$

機率理論

- 古典的機率理論

$$P(E) = \frac{1}{N}$$

- 客觀的機率理論

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

機率理論

- 古典的機率理論

$$P(E) = \frac{1}{N}$$

- 客觀的機率理論

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

- 主觀的機率理論

$$P(E) = [\text{對事件 } E \text{ 發生的信心}]$$

機率的公理

- 公理一
  $0 \leq P(E_i) \leq 1$，表示任一事件 E_i 若可能發生，則其機率大於 0 小於 1。若事件不發生，則其機率等於 0。若事件一定發生，則機率等於 1。

機率的公理

- 公理一
  $0 \leq P(E_i) \leq 1$，表示任一事件 E_i 若可能發生，則其機率大於 0 小於 1。若事件不發生，則其機率等於 0。若事件一定發生，則機率等於 1。
- 公理二
  $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$，$E_1, E_2, \ldots, E_n$互斥，表示若有 n 個互斥事件$E_1, E_2, \ldots, E_n$，則 E_1 發生或 E_2 發生或 E_n 發生的機率為其個別機率的和。

機率的公理

- **公理一**
  $0 \leq P(E_i) \leq 1$，表示任一事件 E_i 若可能發生，則其機率大於 0 小於 1。若事件不發生，則其機率等於 0。若事件一定發生，則機率等於 1。
- **公理二**
  $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$，$E_1, E_2, \ldots, E_n$互斥，表示若有 n 個互斥事件$E_1, E_2, \ldots, E_n$，則 E_1 發生或 E_2 發生或 E_n 發生的機率為其個別機率的和。
- **公理三**
  $P(S) = 1$，表示樣本空間中所有事件均發生的機率總和等於 1。

樂透彩－台灣人的發財夢☺

- 頭獎： $\frac{C_6^6}{C_6^{42}} = \frac{1}{5,245,786} = 0.0000001906$

樂透彩－台灣人的發財夢☺

- 頭獎：$\dfrac{C_6^6}{C_6^{42}} = \dfrac{1}{5,245,786} = 0.0000001906$
- 二獎：$\dfrac{C_1^1 C_5^6}{C_6^{42}} = \dfrac{1 \times 6}{5,245,786} = 0.000001144$

樂透彩－台灣人的發財夢☺

- 頭獎： $\dfrac{C_6^6}{C_6^{42}} = \dfrac{1}{5,245,786} = 0.0000001906$
- 二獎： $\dfrac{C_1^1 C_5^6}{C_6^{42}} = \dfrac{1 \times 6}{5,245,786} = 0.000001144$
- 三獎： $\dfrac{C_1^{35} C_5^6}{C_6^{42}} = \dfrac{35 \times 6}{5,245,786} = 0.00004003$

應用統計學 林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2006

樂透彩－台灣人的發財夢☺

- 頭獎：$\dfrac{C_6^6}{C_6^{42}} = \dfrac{1}{5,245,786} = 0.0000001906$
- 二獎：$\dfrac{C_1^1 C_5^6}{C_6^{42}} = \dfrac{1 \times 6}{5,245,786} = 0.000001144$
- 三獎：$\dfrac{C_1^{35} C_5^6}{C_6^{42}} = \dfrac{35 \times 6}{5,245,786} = 0.00004003$
- 四獎：$\dfrac{C_2^{36} C_4^6}{C_6^{42}} = \dfrac{630 \times 15}{5,245,786} = 0.001801$

應用統計學 林惠玲 陳正倉著 雙葉書廊發行 2006

樂透彩－台灣人的發財夢☺

- 頭獎：$\dfrac{C_6^6}{C_6^{42}} = \dfrac{1}{5,245,786} = 0.0000001906$
- 二獎：$\dfrac{C_1^1 C_5^6}{C_6^{42}} = \dfrac{1 \times 6}{5,245,786} = 0.000001144$
- 三獎：$\dfrac{C_1^{35} C_5^6}{C_6^{42}} = \dfrac{35 \times 6}{5,245,786} = 0.00004003$
- 四獎：$\dfrac{C_2^{36} C_4^6}{C_6^{42}} = \dfrac{630 \times 15}{5,245,786} = 0.001801$
- 普獎：$\dfrac{C_3^{36} C_3^6}{C_6^{42}} = \dfrac{7,140 \times 20}{5,245,786} = 0.02722$

事件機率

- 事件機率的定義
  設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率P(A)為事件A之基本出象的機率總和，即 $P(A)=\sum P(E_i)$，$E_i \in A$。

事件機率

- **事件機率的定義**
設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率$P(\text{A})$為事件A之基本出象的機率總和，即 $P(A) = \sum P(E_i)$，$E_i \in A$。

- **聯合機率的定義**
二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。

事件的聯合（聯合次數分配）

$A \backslash B$	B_1	B_2	…	B_c
A_1	$A_1 \cap B_1$	$A_1 \cap B_2$	…	$A_1 \cap B_c$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$A_r \cap B_1$	$A_r \cap B_2$	…	$A_r \cap B_c$

事件機率

- **事件機率的定義**
  設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率P(A)為事件A之基本出象的機率總和，即 $P(A) = \sum P(E_i)$，$E_i \in A$。

- **聯合機率的定義**
  二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。

聯合機率分配表

$A \backslash B$	B_1	B_2	…	B_c
A_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_1 \cap B_2)$	…	$P(A_1 \cap B_c)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_r	$P(A_r \cap B_1)$	$P(A_r \cap B_2)$	…	$P(A_r \cap B_c)$

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	320	80	400
	狀況差（A_2）	14	36	50
合　計		334	116	450

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	*320*	*80*	*400*
	狀況差（A_2）	*14*	*36*	*50*
合　計		*334*	*116*	*450*

$$P(\text{狀況佳，良品}) = P(A_1 \cap B_1) = 320/450 = 0.71$$

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	$P(A_1 \cap B_1) = 0.71$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.18$	$P(A_1) = 0.89$
	狀況差（A_2）	$P(A_2 \cap B_1) = 0.03$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.08$	$P(A_2) = 0.11$
合　計		$P(B_1) = 0.74$	$P(B_2) = 0.26$	*1.00*

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

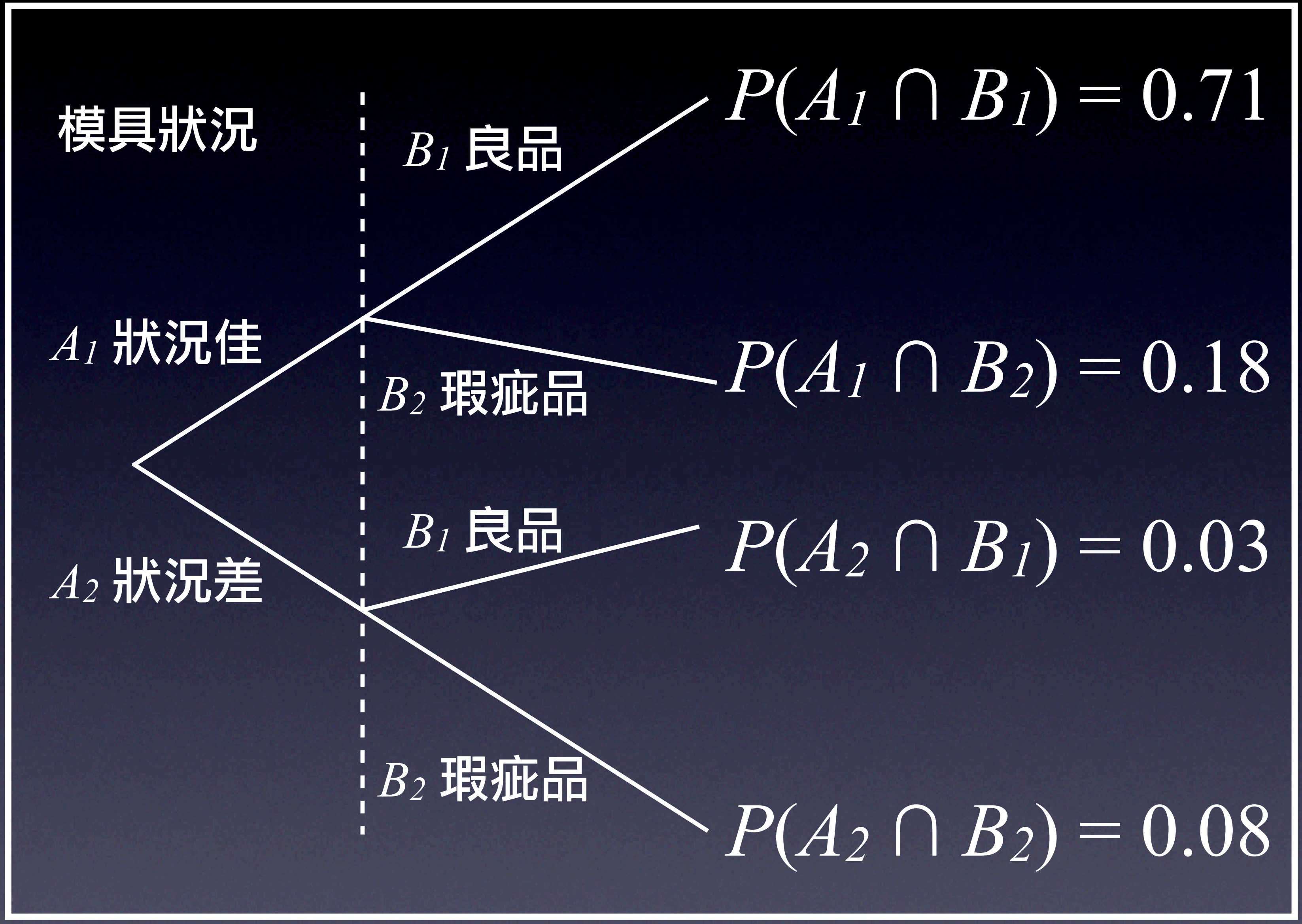
		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	320	80	400
	狀況差（A_2）	14	36	50
合　計		334	116	450

$$P(\text{狀況差，良品}) = P(A_2 \cap B_1) = 14/450 = 0.03$$

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	$P(A_1 \cap B_1) = 0.71$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.18$	$P(A_1) = 0.89$
	狀況差（A_2）	$P(A_2 \cap B_1) = 0.03$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.08$	$P(A_2) = 0.11$
合　計		$P(B_1) = 0.74$	$P(B_2) = 0.26$	1.00

汽車墊片的品質與模具狀況的樹枝圖



事件機率

- **事件機率的定義**
  設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率$P(\mathrm{A})$為事件A之基本出象的機率總和，即 $P(A)=\sum P(E_i)$，$E_i \in A$。

- **聯合機率的定義**
  二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。

- **邊際機率的定義**
  在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱為邊際機率。

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	$P(A_1 \cap B_1) = 0.71$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.18$	$P(A_1) = 0.89$
	狀況差（A_2）	$P(A_2 \cap B_1) = 0.03$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.08$	$P(A_2) = 0.11$
合　計		$P(B_1) = 0.74$	$P(B_2) = 0.26$	1.00

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	$P(A_1 \cap B_1) = 0.71$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.18$	$P(A_1) = 0.89$
	狀況差（A_2）	$P(A_2 \cap B_1) = 0.03$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.08$	$P(A_2) = 0.11$
合　計		$P(B_1) = 0.74$	$P(B_2) = 0.26$	*1.00*

$$P(\text{良品}) = P(B_1) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1)$$
$$= 0.71 + 0.03 = 0.74$$

事件機率

- **事件機率的定義**
  設事件A定義於隨機實驗的樣本空間，其發生之機率P(A)為事件A之基本出象的機率總和，即 $P(A)=\sum P(E_i)$，$E_i\in A$。

- **聯合機率的定義**
  二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。

- **邊際機率的定義**
  在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱為邊際機率。

- **條件機率的定義**
  令 A、B 為定義於樣本空間的事件，已知發生事件 B 之後再發生事件 A 的機率，稱為事件 A 的條件機率。

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	$P(A_1 \cap B_1) = 0.71$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.18$	$P(A_1) = 0.89$
	狀況差（A_2）	$P(A_2 \cap B_1) = 0.03$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.08$	$P(A_2) = 0.11$
合　計		$P(B_1) = 0.74$	$P(B_2) = 0.26$	*1.00*

汽車墊片的品質與模具狀況分析表

		產品（B）		合計
		良品（B_1）	瑕疵品（B_2）	
模具（A）	狀況佳（A_1）	$\boxed{P(A_1 \cap B_1) = 0.71}$	$P(A_1 \cap B_2) = 0.18$	$\boxed{P(A_1) = 0.89}$
	狀況差（A_2）	$P(A_2 \cap B_1) = 0.03$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.08$	$P(A_2) = 0.11$
合　計		$P(B_1) = 0.74$	$P(B_2) = 0.26$	*1.00*

$$P(\text{良品} \mid \text{狀況佳}) = P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = 0.80$$

事件的性質與關係

- 獨立事件
  獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。

事件的性質與關係

- **獨立事件**
  獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。

若 A、B 兩事件合乎於下列任一條件，
則 A、B 互為獨立。

① $P(A \mid B) = P(A)$

② $P(B \mid A) = P(B)$

③ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

台北與紐約股市關聯表

		台北股市		小計
		漲	跌	
紐約股市	漲	*24*	*10*	*34*
	跌	*12*	*16*	*28*
小 計		*36*	*26*	*62*

資料來源：大師資訊。2003/6/1~2003/8/31

台北與紐約股市漲跌機率表

		台北股市		小計
		漲	跌	
紐約股市	漲	*0.387*	*0.161*	*0.548*
	跌	*0.194*	*0.258*	*0.452*
小 計		*0.581*	*0.419*	*1.000*

台北與紐約股市漲跌機率表

		台北股市		小計
		漲	跌	
紐約股市	漲	*0.387*	*0.161*	*0.548*
	跌	*0.194*	*0.258*	*0.452*
小 計		*0.581*	*0.419*	*1.000*

台北與紐約股市漲跌條件機率

		台北股市	
		漲	跌
紐約股市	漲	$P(TPU \cap NYU) = 0.706$	$P(TPD \cap NYU) = 0.294$
	跌	$P(TPU \cap NYD) = 0.429$	$P(TPD \cap NYD) = 0.571$

事件的性質與關係

- 獨立事件
  獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。
- 相依事件
  相依事件係指一事件的發生影響其他事件發生的機率。

事件的性質與關係

- **獨立事件**
  獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。
- **相依事件**
  相依事件係指一事件的發生影響其他事件發生的機率。
- **互斥事件**
  如果事件沒有共同的元素（樣本點），則稱為互斥事件。

高中應屆畢業生申請參加甄試的結果

		甄試結果		合計
		錄取（B_1）	不錄取（B_1）	
性別	男生（A_1）	*175*	*225*	*400*
	女生（A_2）	*100*	*200*	*300*
合計		*275*	*425*	*700*

高中應屆畢業生申請參加甄試的結果

		甄試結果		合計
		錄取（B_1）	不錄取（B_1）	
性別	男生（A_1）	*175*	*225*	*400*
	女生（A_2）	*100*	*200*	*300*
合計		*275*	*425*	*700*

$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{175}{400} = 44\%$$

$$P(B_1 \mid A_2) = \frac{100}{300} = 33\%$$

個別學院甄試結果

	電機學院		文學院	
	男	女	男	女
錄取	*150*	*50*	*25*	*50*
不錄取	*150*	*50*	*75*	*150*
合計	*300*	*100*	*100*	*200*

個別學院甄試結果

	電機學院		文學院	
	男	女	男	女
錄取	*150*	*50*	*25*	*50*
不錄取	*150*	*50*	*75*	*150*
合計	*300*	*100*	*100*	*200*

P(錄取 | 男生 ∩ 電機學院) = 150/300 = 1/2

P(錄取 | 女生 ∩ 電機學院) = 50/100 = 1/2

P(錄取 | 男生 ∩ 文學院) = 25/100 = 1/4

P(錄取 | 女生 ∩ 文學院) = 50/200 = 1/4

事件機率的運算法則

- 加法定理

  兩事件的聯集：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  如果事件 A 與事件 B 互斥，則 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

事件機率的運算法則

- 加法定理

  兩事件的聯集：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  如果事件 A 與事件 B 互斥，則 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- 乘法定理

  兩事件的交集：$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$

  如果 A、B 獨立，則 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

事件機率的運算法則

- **分割定理**

  若 $A_1, \ldots, A_i$ 為分割集合，B 為一事件，則

  $$P(B) = \sum_{i=1}^{r} P(B \cap A_i)$$

  且由 $P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$ 故，

  $$P(B) = \sum_{i=1}^{r} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{r} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

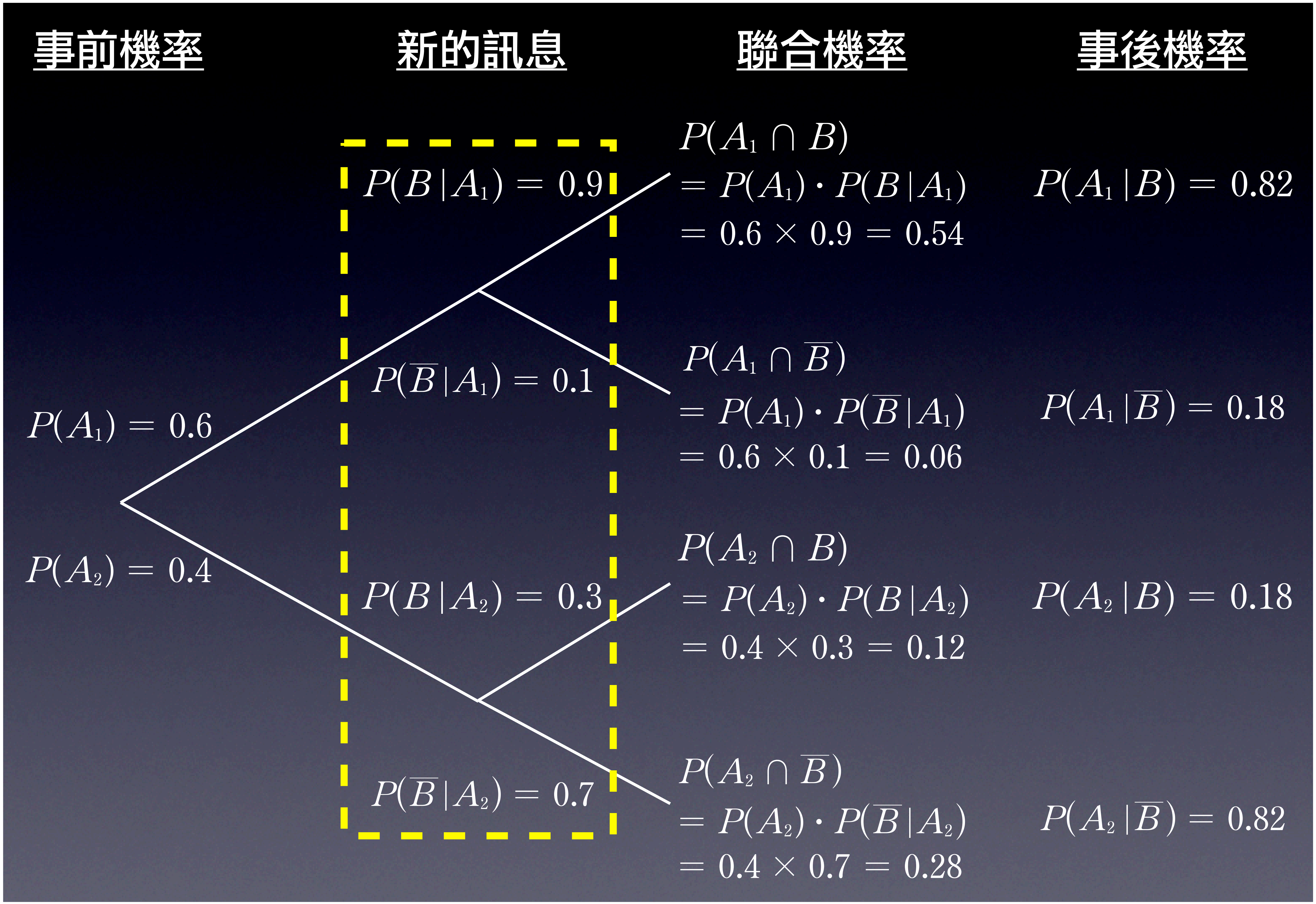
貝氏定理

若已知 $A_1, \ldots , A_i$ 為樣本空間的分割集合，B 為某事件，且已知 $P(A_i)$ 及 $P(B \mid A_i)$，則 B 條件下發生事件 A_i 之機率表為 $P(A_i \mid B)$：

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_r)}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_r)P(B \mid A_r)}$$

貝氏定理的樹枝圖



事前機率
新的訊息
聯合機率
事後機率
$P(A_1) = 0.6$
$P(A_2) = 0.4$
$P(B|A_1) = 0.9$
$P(\overline{B}|A_1) = 0.1$
$P(B|A_2) = 0.3$
$P(\overline{B}|A_2) = 0.7$
$P(A_1 \cap B)$
$= P(A_1) \cdot P(B|A_1)$
$= 0.6 \times 0.9 = 0.54$
$P(A_1 \cap \overline{B})$
$= P(A_1) \cdot P(\overline{B}|A_1)$
$= 0.6 \times 0.1 = 0.06$
$P(A_2 \cap B)$
$= P(A_2) \cdot P(B|A_2)$
$= 0.4 \times 0.3 = 0.12$
$P(A_2 \cap \overline{B})$
$= P(A_2) \cdot P(\overline{B}|A_2)$
$= 0.4 \times 0.7 = 0.28$
$P(A_1|B) = 0.82$
$P(A_1|\overline{B}) = 0.18$
$P(A_2|B) = 0.18$
$P(A_2|\overline{B}) = 0.82$

貝氏定理的應用

事前機率

貝氏定理的應用

事前機率

取得新資訊

貝氏定理的應用

- 事前機率
- 取得新資訊
- 應用貝氏定理

貝氏定理的應用

事前機率

取得新資訊

應用貝氏定理

事後機率