

零、基礎數理複習

I. 常用函數介紹

函數(function) 用來代表當某個變數 (value) 之值改變時, 可能產生對“某項”反應之值相對應之改數, 常用 $f(x)$ 、 $g(x)$ 等符號來代表當變數 x 之函數。在統計中常用的函數介紹如下:

- (1) $f(x) = c, c \in \mathcal{R}$: 稱為常數(constant) 函數, 其中 c 可以為任意實數, 函數 $f(x)$ 不會因為變數 x 之改變而變動。
- (2) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_i \in \mathcal{R}, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathcal{N}$: $f(x)$ 稱為多項式 (polynomial)。為最常見之函數。
- (3) $f(x) = e^{g(x)}$: 指數函數。且 $e^0 = 1, e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$
- (4) $f(x) = \log_a g(x)$: 對數函數 (log function), 為以 a 為底之對數函數, 其中 a 為一常數 (constant)。最常見之對數函數為以自然數 e 為底之函數, 以 $f(x) = \ln g(x)$ 表示。令 m, n 為兩個常數, 對數函數具有以下特性:
 - (i) $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$
 - (ii) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$
 - (iii) $\log_a m^n = n \log_a m$
 - (iv) $\log_a 1 = 0$
 - (v) $\log_a a = 1$
 - (vi) $x = e^{\ln x}$

II. 微積分

微積分為最常用之數學方法, 在統計中:

微分 常用於求函數之極值, 在統計中常用來求解連續型隨機變數之眾數發生之所在; 及利用最大概似法 (maximum likelihood) 來求解參數最有可能發生之值。

積分 常用於求解函數所包含之面積及體積之值, 在統計中常用來求解連續型隨機變數在某段區間發生之機率 (probability)、平均數 (mean) 或期望值 (expected value) 及變異數 (variance) 等

在統計中常用的微積分公式如下:

$f(x) = c, c \in \mathcal{R}$	$f'(x) = 0$	$\int f(x) dx = cx + d$
$f(x) = cx, c \in \mathcal{R}$	$f'(x) = c$	$\int f(x) dx = \frac{1}{2} cx^2 + d$
$f(x) = cx^n, c \in \mathcal{R}, n \in \mathcal{N}$	$f'(x) = cnx^{n-1}$	$\int f(x) dx = \frac{1}{n+1} cx^{n+1} + d$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\int f(x) dx = e^x + d$
$f(x) = e^{cx}$	$f'(x) = ce^{cx}$	$\int f(x) dx = \frac{1}{c} e^{cx} + d$
$f(x) = \ln x, x > 0,$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \frac{1}{x}$		$\int f(x) dx = \ln x + d$
$f(x) = \ln g(x), g(x) > 0,$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	
$f(x) = cg(x)$	$f'(x) = cg'(x)$	$\int f(x) dx = c \int g(x) dx$
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$	$\int f(x) dx = \int g(x) dx \pm \int h(x) dx$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$	

其他常用的微積分公式:

- (1) 連鎖法則 (chain rule): $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$
- (2) 部分積分法 (integration by parts): $\int udv = uv - \int vdu$

Ex 1. 令 $f(x) = \frac{1}{b-a}$, 其中 a, b 為兩個常數 (constant), 且 $b > a$, 求 (a) $\int_a^t f(x)dx$; (b) $\int_a^b xf(x) dx$; (c) $\int_a^b x^2 f(x)dx$

(Sol.)

Note: 在機率中 $f(x) = \frac{1}{b-a}$ 為介於 a 與 b 之間之均勻變數 (uniform random variable) 之機率分配函數 (probability distribution function),

- 由 (a) 小題可知, 若 $t \in [a, b]$, 則累積機率函數為 $P(X \leq t) = \frac{t-a}{b-a}$ 。
- 由 (b) 小題可知 $\int_a^b xf(x)dx = E(X)$, 所以均勻變數之期望值為 $E(X) = \frac{a+b}{2}$ 。
- 由 (c) 小題可知, 均勻隨機變數之變異數 $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$ 。

Ex 2. 令 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, 其中 $\lambda > 0$ 為一常數, 試求 (a) $\int_0^t f(x)dx$; (b) $\int_0^\infty xf(x)dx$; (c) $\int_0^\infty x^2 f(x)dx$

(Sol.)

Note: 在機率中 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$ 且 $x > 0$, 為參數為 λ 之指數隨機變數 (exponential random variable) 之機率分配函數 (probability distribution function),

- 由 (a) 小題可知, 若 $t \in [a, b]$, 則累積機率函數為 $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ 。
- 由 (b) 小題可知 $\int_0^\infty xf(x)dx = E(X)$, 所以均勻變數之期望值為 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ 。
- 由 (c) 小題可知, 均勻隨機變數之變異數 $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ 。

III. 總和符號

令 a_1, a_2, \dots, a_n 為一數列, 在數學中常利用總和符號 (\sum) 來代表連續 n 項之總和, 常見之總和公式如下:

(1) 令 $a_i = c$, 其中 c 為一常數, 則 $\sum_{i=1}^n a_i = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n \text{ 個 } c \text{ 相加}} = n \cdot c$

(2) 令 $a_i = i$, 則 $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) 令 $a_i = i^2$, 則 $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(4) 令 $a_i = a_1 r^{i-1}$, 其中 $a_1 \in \mathcal{R}$, 則 a_1, a_2, \dots, a_n 為一有限等比級數, 則此有限等比級數之和
$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} = a_1(1 + r + \dots + r^{n-1}) = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

(5) 令 $a_i = a_1 r^{i-1}$, 其中 $a_1 \in \mathcal{R}$ 且 $|r| < 1$ 則 a_1, a_2, a_3, \dots , 為一無限等比級數, 則此無限等比級數之和
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots = a_1(1 + r + r^2 + \dots) = \frac{a_1}{1-r}$$

IV. 計數方法

Theorem (乘法法則)

若一件工作必需經由兩個步驟來完成, 第一個步驟可藉由 m 種不同的方法來完成, 第二個步驟有 n 種不同的方法來完成, 則共可以有 $m \times n$ 種不同的方法來完成該工作。

Theorem (加法法則)

若一件工作可以利用兩種不同的方法來完成, 如果第一個方法有 m 種方法來完成, 第二個方法有 n 種不同的方法來完成, 則共可以有 $m + n$ 種不同的方法來完成此工作。

Theorem

將物體有順序性的排法稱為排列 (permutation)。

(1) n 個不同物體排列的方法有 $n!$ 種, 其中 $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$ 。

(2) 從 n 個不同的物體中取 r 個物體來排列, 共有 P_r^n 或 ${}_n P_r$ 種, 其中 $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ 。

(3) 從 n 個不同的物體中取 r 個物體來排列, 若假設可以重覆選取, 則共有 n^r 種方法。

(4) n 個物體中有 k 個物體是相同的, 則排列方法有 $\frac{n!}{k!}$ 種。

(5) n 個物體, 其中有 k_1 個物體是相同的, k_2 個物體是相同的, \dots , k_s 個物體是相同的, 則將 n 個物體來排列共有 $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$ 。

Theorem

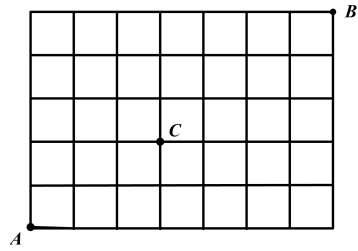
將物體做沒有順序性的排法稱為組合 (combination)。

(1) 從 n 個不同的物體中取 r 個物體形成一組合的方法有 C_r^n 或 ${}_n C_r$ 種, 其中 $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 。

(2) 從 n 個不同的物體中取 $n-r$ 個物體形成一組合的方法有 C_{n-r}^n 或 ${}_{n-r} C_r$ 種, 其中 $C_{n-r}^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_r^n$ 。

Ex 3. 右圖, 由 A 到 B 走捷徑 (只許 \rightarrow, \uparrow), 試求

- (1) 由 A 到 B 全部的走法有幾種?
- (2) 由 A 到 B 必經過 C 的走法有幾種?
- (3) 甲從 A 走到 B , 請問甲會經過 C 點的機率有多少?



(Sol.)

Ex 4. An "all possible regressions" search of a data set containing 7 independent variables will produce _____.
(93年台大工工所)

- (A) 13 regressions
- (B) 48 regressions
- (C) 64 regressions
- (D) 127 regressions
- (E) none of the above

(Sol.)

Ex 5. 將四種不同的酒倒入三個不同的酒杯中, 每一酒杯必須有酒且杯中之酒不可混合, 則共有幾種倒法?

(Sol.)

Ex 6. 試問字母 *PEPPER* 有多少種不同的排列?

(Sol.)

Ex 7. 從 20 人中選取 3 人形成一委員會, 試問組成不同委員會的方法有多少?

(Sol.)

Ex 8. *Of 10 people on a student newspaper staff, 6 are familiar with a particular word processing package. If three people are randomly selected as assigned to work as a team, how many ways could a team be selected in which one was familiar with the word processing package and the other two were not? (92年台大工工所)*

(A) 24

(B) 120

(C) 20

(D) 36

(Sol.)

Theorem (Binomial Theorem)

$$(x + y)^n = \sum_{i=1}^n C_i^n x^i y^{n-i}$$
$$(ax + by)^n = \sum_{i=1}^n C_i^n (ax)^i (by)^{n-i}$$

Ex 9. 請問下列展開式中, x^3y^4 的係數為何?

(1) $(x + y)^7$

(2) $(3x + 4y)^7$

(Sol.)