行動通訊

CHAPTER 2

機率、統計與流量理論

2.2.1　隨機變數

- 隨機變數為以一個任意隨機現象之特徵所定義的函數。
- 若一隨機變數為連續變數，則可定義其機率密度函數（probability density function; pdf），而離散隨機變數則有機率分佈函數（probability distribution function）或機率質量函數（probability mass function; pmf），用來反映該變數在離散區間的行為特徵。

離散隨機變數

- 對離散隨機變數X，X的機率質量函數p(k)是隨機變數X等於k的機率，其定義如下：

$$p(k) = P(X = k), \qquad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- 它滿足下列情況：

1. $0 \le p(k) \le 1$, for every k

2. $\sum p(k) = 1$, for all k

連續隨機變數

- 連續隨機變數X的機率密度函數 $f_X(x)$ 是一個定義於整個實數集合（－∞, ∞）使得每個子集S，（－∞, ∞）的非負數函數，

$$P\,(X \subset S) = \int_S f_X(x)\,dx$$

其中x為積分中的一個變數。它需要滿足下列條件：

1. $f_x(x) \ge 0$, for all x

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = 1$

2.2.2　累積分配函數

- 所有離散（或連續）隨機變數的累積分配函數（cumulative distribution function, CDF）可用P(k)（或Fx(x)）來表示，它代表對每一k（或x）值隨機變數X小於或等於k（或x）之機率。

2.2.3　機率密度函數

- 連續隨機變數的機率密度函數，可經由積分得到。在某一區間，該隨機變數等於某一數值的機率。

離散隨機變數

- 期望值或均值：

$$E[X]=\sum_{\text{all }k} kP(X=k)$$

- 離散隨機變數X的函數g(X)，它的期望值是另一個隨機變數Y的均值，其從X之機率分佈假設g(X) 的值。記作E[g(X)]，定義如下：

$$E[g(X)]=\sum_{\text{all }k} g(k)P(X=k)$$

離散隨機變數

- 第n階矩量：

$$E[X^n]=\sum_{\text{all }k} k^n P(X=k)$$

- X的第一階矩量就是X的期望值。

離散隨機變數

- 第n階中心矩：中心矩是均值的矩量；也就是，

$$E\left[(X-E[X])^n\right]=\sum_{\text{all }k}(k-E[X])^n P(X=k)$$

- 第一階中心矩為零。

離散隨機變數

- 變異數或二階中心矩：

$$\sigma^2=\mathrm{Var}(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]=E\left[X^2\right]-(E[X])^2$$

- 其中σ稱為標準差。

連續隨機變數

- 期望值或均值：

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

- 連續隨機變數X的函數g(X)，它的期望值是另一個隨機變數Y的均值，其從X之機率分佈假設g(X) 的值。記作E[g(X)]，定義如下：

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx$$

連續隨機變數

- 第n階矩量：

$$E[X^n]=\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx$$

- 第n階中心矩：

$$E\left[(X-E[X])^n\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^n f_X(x)\,dx$$

- 變異數或二階中心矩：

$$\sigma^2=\mathbf{Var}(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]=E\left[X^2\right]-(E[X])^2$$

離散隨機變數

- 波松分佈：波松隨機變數為某區間內特定事件發生的次數。
- 發生k事件的機率分佈是

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\qquad k=0,1,2,\ldots,\ \text{and}\ \lambda>0$$

- 波松分佈有期望值 $E[X]=\lambda$與變異數 $Var(X)=\lambda$

CENGAGE Learning

離散隨機變數

- 幾何分佈：幾何隨機變數表示在獲得第一次成功之前所需失敗的次數。
- 其隨機變數X的機率分佈為：

$$P(X=k)=p(1\text{-}p)^k,\ k=0,1,2,\ldots,$$

- 其中p為成功之機率。
- 幾何分佈有期望值$E[X]=(1\text{-}p)/p$
 與變異數$(1\text{-}p)/p^2$

CENGAGE Learning

離散隨機變數

- 二項式分佈：二項式隨機變數表示一連串n次試驗中出現k次成功之次數。
- 其隨機變數X的機率分佈為：

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

- 其中k=0, 1, 2, …, n，n=0, 1, 2,…，p成功機率，以及 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
- 二項式分佈有期望值 $E[X]=np$ 與
 變異數 $Var(X)=np(1-p)$

CENGAGE Learning

離散隨機變數

- 波松分佈有時可用來近似二項式分佈（參數n與p），當觀察次數n很大時且成功機率p很小時，二項式分佈近似於波松分佈，其中參數為

$$\lambda = np$$

CENGAGE Learning

連續隨機變數

- 常態分佈：常態隨機變數應能假定為所有實數，但此要件在實務上經常捨棄。
- 隨機變數X的機率密度函數為：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad \text{for}\ -\infty<x<\infty$$

- 而累積分配函數可由下式求得：

$$F_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$$

CENGAGE Learning

連續隨機變數

- 常態分佈
- 通常，我們以X～N（μ,σ^2）表示X為常態隨機變數，其期望值與變異數分別為μ與σ^2。
- 當 $\mu=0$與$\sigma=1$時稱為標準常態分佈。

CENGAGE Learning

連續隨機變數

- 均勻分佈：均勻隨機變數的值是均勻地分佈於區間。
- 隨機變數X的機率密度分佈為：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & \text{for } a\le x\le b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- 累積分配函數為：$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{for } x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{for } a\le x\le b\\ 1, & \text{for } b<x.\end{cases}$
- 均勻分佈有期望值 $E[X]=(a+b)/2$ 與變異數 $Var(X)=(b-a)^2/12$

連續隨機變數

- 指數分佈：指數分佈在工程領域時常用到。
- 隨機變數X的機率密度函數為：

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{for } 0\le x<\infty\end{cases}$$

- 與累積分配函數為：

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{for } 0\le x<\infty\end{cases}$$

- 其中 λ 是速率。
- 指數分佈有期望值 $E[X]=1/\lambda$ 與變異數 $Var(X)=1/\lambda^2$

2.2.6 多重隨機變數

- 在某些情況下，一個隨機實驗的結果是取決於多個隨機變數之值，其中這些值又可能會相互影響。
- 離散隨機變數X1, X2, …, Xn的聯合機率質量函數（joint pmf）為：

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n)$$

- 並代表 $X_1=x_1, X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n$ 的機率。

2.2.6 多重隨機變數

- 聯合分佈函數

$$F_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n)$$

- 聯合機率密度函數為：

$$f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{\partial^n F_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}$$

條件機率

- 條件機率是當給定，$X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n$ $X_1=x_1$ 的機率。
- 以離散隨機變數而言

$$P(X_1=x_1\mid X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n)=\frac{P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n)}{P(X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n)}$$

- 以連續隨機變數而言

$$P(X_1\le x_1\mid X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n)=\frac{P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n)}{P(X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n)}$$

貝式定理

- 有一定理關注P(X | Y) 形式（讀作：已知Y，X的機率）的條件機率是：

$$P(X\mid Y)=\frac{P(Y\mid X)\,P(X)}{P(Y)}$$

- 其中P(Y) 與P(X) 分別為Y與X的非條件機率。

重要特性

- 期望值的總和特性：
- 隨機變數X1, X2, …, Xn之總和的期望值為：

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$$

- 其中 a_i 為任意常數。

重要特性

- 期望值的乘積特性：
- 若隨機變數X1, X2,…, Xn是隨機的（stochastically）相互獨立

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$$

重要特性

- 變異數的總和特性：
- 隨機變數X1, X2, …, Xn之總和的變異數為：

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

- 其中Cov[Xi, Xj] 為隨機變數Xi與Xj的共變數（covariance）

中央極限定理

- 中央極限定理是指從期望值為E[Xi] = μ 與變異數為 $Var(X_i) = \sigma^2$ 之分佈中，隨機抽取大小為n的隨機樣本（X1, X2, …, Xn），其中i = 1, 2, …, n，則其代數平均可定義為：

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- 樣本平均數可從E[Sn] = μ 與變異數 $Var(S_n) = \sigma^2/n$ 之常態分佈來近似，且當樣本大小n值越大，越趨於常態。

2.3.1 波松到訪模型

- 波松過程（Poisson process）是區間內一連串隨機間隔的事件。
- 在時間區間 [0, t]，t個單位時間內有n個到訪的機率是：

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- 我們可以觀察到訪間隔時間T1, T2, T3 …是相互獨立，且各具有相同的指數分佈，其平均率為 λ。

無記憶性

- 波松過程的重要性基於它是唯一一個具有無記憶性的連續隨機變數。

$$P(X > \delta + t \mid X > \delta) = P(X > t)$$

- 在行動領域，這意味著新通話是獨立於該用戶的過去歷史話務。

合併性

- 如果我們合併n個波松過程成一個單一過程，則其合併結果為一個波松過程，其中

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

2.4.3 Kendall的記號

- D. G. Kendall在1951年［2.3］提出一個標準記號，用來將排隊系統區分成不同類型。
- 用以下記號來加以描述：A/B/C/D/E

A	顧客到訪間隔時間之分佈
B	服務時間之分佈
C	伺服器數量
D	系統最大顧客數
E	通話人口大小

2.4.3 Kendall的記號

- 且A與B可以是下列分佈類型中任何一種：

M	指數分佈（馬可夫；Markovian）
D	退化（degenerate）分佈（或定性分佈）
E_K	爾朗（Erlang）分佈（*k* 爲外型參數）
G	一般分佈（任意分佈）
H_K	參數爲 *k* 之超指數

2.4.4 Little氏定理

- λ— 平均穩態顧客到訪率。
- N— 系統內平均顧客數（包括緩衝區內與服務中）。
- T— 系統內每位顧客平均駐留時間（花在佇列的時間加上服務時間）。

$$N = \lambda T$$

2.4.5 馬可夫過程

- 馬可夫過程是一個過程其下一狀態僅取決於現在狀態，而無關於任何先前狀態。
- 馬可夫鏈（Markov chain）是一個離散狀態的馬可夫過程。

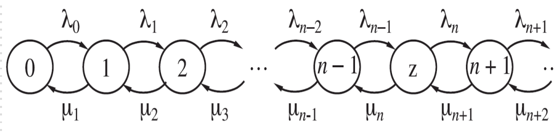
2.4.6 出生死滅過程

- 這是一種特殊型態的馬可夫過程。
- 在狀態n，我們有：

$$\lambda_{n-1} P(n-1) + \mu_{n+1} P(n+1) = (\lambda_n + \mu_n) P(n)$$

- 其中P(i) 是狀態i的穩態機率。
- $\lambda_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots)$ 是平均到訪率。
- $\mu_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots)$ 是平均服務率。

2.4.6 出生死滅過程



出生死滅過程的狀態轉移圖

行動通訊 第二章 第46頁 圖2.1

CENGAGE Learning

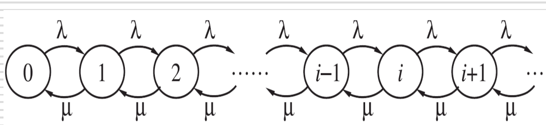
2.4.7 M/M/1/∞ 排隊系統

- 在一個M/M/1排隊系統，顧客的到訪是依據波松分佈，且以先進先出（first-in-first-out; FIFO）或先到先得（first-come-first-served; FCFS）方式來爭取被服務機會。
- M/M/1排隊系統含有一個出生死滅過程。

行動通訊 第二章 第47頁

CENGAGE Learning

2.4.7 M/M/1/∞ 排隊系統



M/M/1/∞ 排隊系統的狀態轉移圖

行動通訊 第二章 第47頁 圖2.3

CENGAGE Learning

2.4.7 M/M/1/∞ 排隊系統

$$P(0) = 1 - \rho$$

$$P(i) = \rho^i (1 - \rho)$$

行動通訊 第二章 第48頁

CENGAGE Learning

2.4.7 M/M/1/∞ 排隊系統

- 系統的平均顧客數為：

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{i=0}^{\infty} i\,P(i) \\ &= \rho\,(1-\rho) \sum_{i=1}^{\infty} i\rho^{i-1} \\ &= \rho\,(1-\rho) \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)' \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

行動通訊 第二章 第48-49頁

CENGAGE Learning

2.4.7 M/M/1/∞ 排隊系統

- 利用Little’s定理，行動系統中細胞的每一顧客平均駐留時間為：

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{L_s}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\mu\,(1-\rho)} \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

行動通訊 第二章 第49頁

CENGAGE Learning

2.4.7 M/M/1/∞ 排隊系統

- 平均佇列長度為：

$$L_q = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)\,P(i) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu-\lambda)}$$

2.4.7 M/M/1/∞ 排隊系統

- 顧客平均等候時間為：

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda\,(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu\,(\mu-\lambda)}$$